LuFG Informatik II

Modularity of Termination in Probabilistic Term Rewriting

Jan-Christoph Kassing and Jürgen Giesl
RWTH Aachen University
03.09.2025

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{plus}(0, y) & \to & y \\
\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))
\end{array}
$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\rightarrow y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

$$\searrow$$

$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\rightarrow y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

$$\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$

$$\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

$$\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$

$$\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$$

$$\to \mathsf{s}(0)$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), 0) \qquad \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$

$$\swarrow$$

$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$$

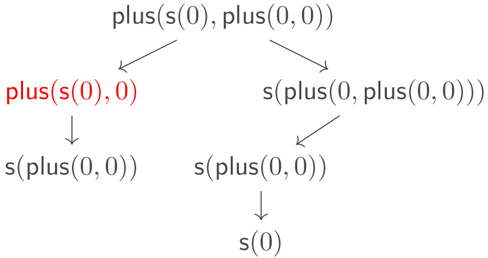
$$\downarrow$$

$$\mathsf{s}(0)$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\rightarrow y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$

$\swarrow$ $\searrow$

$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), 0)$ $\qquad$ $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$

$\downarrow$ $\qquad$ $\swarrow$

$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$ $\qquad$ $\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$

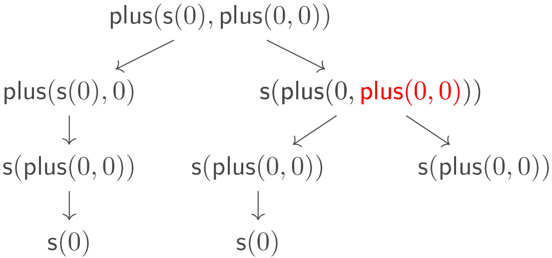
$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\mathsf{s}(0)$ $\qquad$ $\mathsf{s}(0)$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

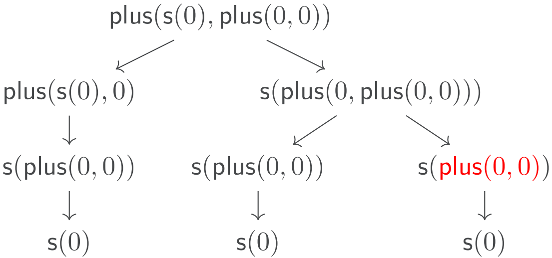
$$\begin{aligned}\mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))\end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

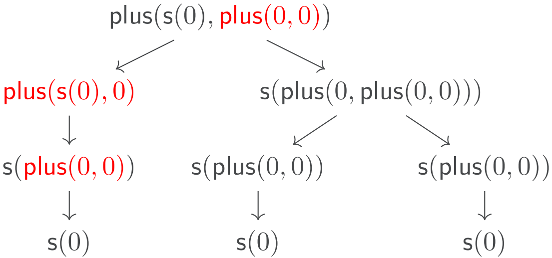
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

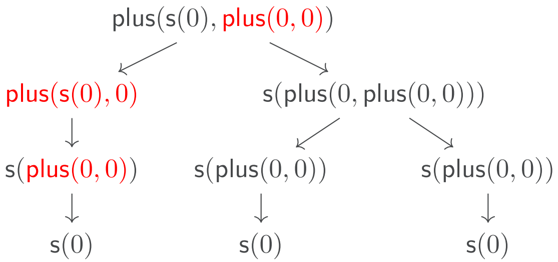


Innermost evaluation: always use an innermost reducible expression

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Innermost evaluation: always use an innermost reducible expression

Termination (Term)

$\mathcal{R}$ is terminating iff there is no infinite evaluation $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Modularity

Modularity

Imperative Programs:

Modularity

Imperative Programs:

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Modularity

Imperative Programs:

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$

Modularity

Imperative Programs:

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \text{ has property } \texttt{Prop} \\ \mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_1;\mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop}$$

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution

↑

$\mathcal{P}_1$ has property Prop
$\mathcal{P}_2$ has property Prop $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_1 ; \mathcal{P}_2$ has property Prop

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution

$\uparrow$

$$\begin{matrix}\mathcal{P}_1 \text{ has property } \texttt{Prop} \\ \mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop}\end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}_1 ; \mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop}$$

Term Rewriting:

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution

↑

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_1;\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Term Rewriting:

$\mathcal{R}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution ↑

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_1; \mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Term Rewriting:

$\mathcal{R}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution ↑

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_1 ; \mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Term Rewriting:

$\mathcal{R}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution ↑

$\mathcal{P}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_1 ; \mathcal{P}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Term Rewriting:

Union of Rule Sets ↑

$\mathcal{R}_1$ has property $\texttt{Prop}$
$\mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ has property $\texttt{Prop}$

Modularity

Imperative Programs:

Sequential Execution

$\uparrow$

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \text{ has property } \texttt{Prop} \\ \mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop} \end{array} \implies \mathcal{P}_1;\mathcal{P}_2 \text{ has property } \texttt{Prop}$$

Term Rewriting:

Union of Rule Sets

$\uparrow$

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}_1 \text{ has property } \texttt{Prop} \\ \mathcal{R}_2 \text{ has property } \texttt{Prop} \end{array} \implies \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \text{ has property } \texttt{Prop}$$

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0,x) & \to & x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{array}$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: **[Toyama'87]**

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g})$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g})$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g})$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g})$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: **[Toyama'87]**

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$f(a, b, x) \to f(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$g \to a$$
$$g \to b$$

$$f(a, b, g) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} f(g, g, g) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} f(a, g, g) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} f(a, b, g) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$a \to b$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$b \to a$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

a

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

$$\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{b}$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

$$\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{b} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{a}$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

$$\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{b} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

$$\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{b} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term

(Innermost) Termination is not Modular

Termination: [Toyama'87]

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{g} \to \mathsf{a}$$
$$\mathsf{g} \to \mathsf{b}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}) \to_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Termination is not Modular

Innermost Termination:

$\mathcal{R}_1$: Term

$$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}_2$: Term

$$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$$

$$\mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{b} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \mathsf{a} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ not Term $\Rightarrow$: Innermost Termination is not Modular

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil}))$$

Innermost Termination is Modular for . . .

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil}))$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0, x) & \to & x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{s}(0)), \mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0), \mathsf{nil}))$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) & \to & \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0,x) & \to & x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{array}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

Innermost Termination is Modular for . . .

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \dots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to 0'$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) \to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y))$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\mathsf{plus}(0, x) \to x$$
$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{s}(0)), \mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0), \mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \dots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to 0$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y))$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\mathsf{plus}(0, x) \to x$$
$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}), \mathsf{len}(\mathsf{nil}))$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}),\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,\mathsf{len}(\mathsf{nil}))$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \dots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}),\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,0)$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to 0'$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) \to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y))$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\mathsf{plus}(0,x) \to x$$
$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \ldots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to 0$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y))$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\mathsf{plus}(0,x) \to x$$
$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}),\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,0) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \ldots$$

Innermost Termination is Modular for ...

Disjoint Unions: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}'_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0' \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}'(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{plus}(0,\mathsf{s}(0)),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(0),\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}'_{len}} \dots$$

$\mathcal{R}'_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Shared Constructor Systems: [Gramlich'95]

$\mathcal{R}_{len}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{plus}$: Term

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0,x) &\to x \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}),\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,\mathsf{len}(\mathsf{nil})) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{len}} \mathsf{plus}(0,0) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{plus}} \dots$$

$\mathcal{R}_{len} \cup \mathcal{R}_{plus}$ is Term

Overview

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

2. Modularity of $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

2. Modularity of $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

3. $\mathtt{PAST} \approx \mathtt{SAST}$ for PTRSs

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

2. Modularity of $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

3. $\mathtt{PAST} \approx \mathtt{SAST}$ for PTRSs

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \rightarrow \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, 1/2 : 0,\; 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, {}^1\!/\!_2 : 0,\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathsf{g}(0) \to \{\, ^1/_2 : 0,\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : 0,\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \}$

Multi-Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(0) \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \}$$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),$$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathsf{g}(0) \quad\to\quad \{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad \{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad \{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_4 : \mathsf{g}(0),\ {}^1\!/\!{}_4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad \{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_8 : 0,\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^2(0),\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^2(0),\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathsf{g}(0) \to \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\begin{aligned}
& \{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\} \\
\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \,\} \\
\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{\, 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \,\} \\
\to_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{\, 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}
\end{aligned}$$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(0) \;\to\; \{\, 1/2 : 0,\; 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\; 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\; 1/4 : \mathsf{g}(0),\; 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\; 1/8 : 0,\; 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\; 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\; 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ No

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini, Dal Lago, Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (AST) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}(0),\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_8 : 0,\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(0),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(0),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (AST) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \}$

Multi-Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(0) \}$ 0

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \}$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \}$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \}$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini, Dal Lago, Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (AST) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$ $\quad 0$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$ $\quad ^1\!/_2$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}(0),\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_8 : 0,\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(0),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(0),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini, Dal Lago, Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (AST) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \}$

Multi-Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ — $|\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(0) \}$ — 0

$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \}$ — $1/2$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \}$ — $1/2$

$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \}$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini, Dal Lago, Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ — No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (AST) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ — $|\mu|$

	$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$	0
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$	$1/2$
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}(0),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$	$1/2$
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : 0,\ 1/8 : 0,\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(0),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$	$5/8$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ — No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (`AST`) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Almost-Sure Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(0) \to \{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$

Multi-Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ — $|\mu|$

	$\{\, 1 : \mathsf{g}(0) \,\}$	0
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_2 : \mathsf{g}^2(0) \,\}$	${}^1\!/\!{}_2$
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_4 : \mathsf{g}(0),\ {}^1\!/\!{}_4 : \mathsf{g}^3(0) \,\}$	${}^1\!/\!{}_2$
$\to_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, {}^1\!/\!{}_2 : 0,\ {}^1\!/\!{}_8 : 0,\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^2(0),\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^2(0),\ {}^1\!/\!{}_8 : \mathsf{g}^4(0) \,\}$	${}^5\!/\!{}_8$

Almost-Sure Termination for PTRSs [Avanzini, Dal Lago, Yamada'20]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ — No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating* (`AST`) iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \to_{\mathcal{R}} \mu_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ — Yes

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}\}$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$\{ 1 : \mathsf{g} \}$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g} \,\}$

$$\{\, 1 : \mathsf{g} \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g} \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_4 : 0,\ ^1\!/_4 : \mathsf{g} \,\}$$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\quad \mathsf{g} \to \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g} \,\}$

$$\{\, 1 : \mathsf{g} \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_2 : \mathsf{g} \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{\, ^1\!/_2 : 0,\ ^1\!/_4 : 0,\ ^1\!/_4 : \mathsf{g} \,\}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots$$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\quad \mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$
\begin{aligned}
& \{ 1 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \; & \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \; & \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \; & \dots
\end{aligned}
$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0, \ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$
\begin{aligned}
& \{ 1 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \{ 1/2 : 0, \ 1/2 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \{ 1/2 : 0, \ 1/4 : 0, \ 1/4 : \mathsf{g} \} \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \ldots
\end{aligned}
$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \}$$

$|\mu| = 0$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \}$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$
\begin{aligned}
& \{ 1 : \mathsf{g} \} && |\mu| = 0 \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} && |\mu| = 1/2 \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} && |\mu| = 3/4 \\
\to_{\mathcal{R}_{coin}} \quad & \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mu_n|)
\end{aligned}
$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = 2$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\quad \mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n = 2$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation — Yes

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\quad \mathsf{g} \to \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \}$

$$\{ 1 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 0$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 1/2$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \{ 1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g} \} \qquad |\mu| = 3/4$$

$$\to_{\mathcal{R}_{coin}} \ldots \qquad \mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n = 2$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation — Yes
- $\mathcal{R}$ is *strong almost-surely terminating* (SAST) iff there exists a $C_t \in \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}(\vec{\mu}) < C_t < \infty$ for every infinite evaluation $\vec{\mu}$ starting with $\{1 : t\}$

Positive and Strong Almost-Sure Termination

$\mathcal{R}_{coin}$: $\mathsf{g} \to \{\,1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}\,\}$

$$\begin{aligned} & \{\,1 : \mathsf{g}\,\} & |\mu| = 0 \\ \to_{\mathcal{R}_{coin}} & \{\,1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}\,\} & |\mu| = 1/2 \\ \to_{\mathcal{R}_{coin}} & \{\,1/2 : 0,\ 1/4 : 0,\ 1/4 : \mathsf{g}\,\} & |\mu| = 3/4 \\ \to_{\mathcal{R}_{coin}} & \ldots \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|) = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n = 2$$

Positive/Strong AST for PTRSs [Avanzini,Dal Lago,Yamada'20] [Bournez'05]

- $\mathcal{R}$ is *positive almost-surely terminating* (PAST) iff $\mathbb{E}(\vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\mu_n|)$ (*expected runtime*) is finite for every infinite evaluation — Yes
- $\mathcal{R}$ is *strong almost-surely terminating* (SAST) iff there exists a $C_t \in \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}(\vec{\mu}) < C_t < \infty$ for every infinite evaluation $\vec{\mu}$ starting with $\{1 : t\}$ — Yes

AST vs. PAST vs. SAST

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

AST vs. PAST vs. SAST

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

AST **and not** PAST**:**

AST vs. PAST vs. SAST

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

AST and not PAST:

$\mathcal{R}_{rw}$:

$$\mathsf{g}(0) \quad \to \quad \{\, {}^{1}\!/\!{}_{2} : 0,\; {}^{1}\!/\!{}_{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \,\}$$

AST vs. PAST vs. SAST

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

AST and not PAST:

$\mathcal{R}_{rw}$:
$$\mathsf{g}(0) \quad \to \quad \{\, ^1/_2 : 0,\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0))\,\}$$

Symmetric Random Walk

AST vs. PAST vs. SAST

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

AST and not PAST:

$\mathcal{R}_{rw}$:

$$\mathsf{g}(0) \quad \to \quad \{\, 1/2 : 0,\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0))\,\}$$

Symmetric Random Walk
$\Rightarrow$ AST as we have seen

AST vs. PAST vs. SAST

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

AST and not PAST:

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathsf{g}(0) \to \{ \,^1\!/_2 : 0, \,^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)) \, \}$$

Symmetric Random Walk
⇒ AST as we have seen
⇒ Not PAST (no details)

AST vs. PAST vs. SAST

PAST **and not** SAST**:**

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{''} \end{array}$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\
\mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\
\text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”}
\end{aligned}
$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\}$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\begin{aligned} \{1 : \mathsf{f}(0)\} &\to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\} \\ &\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots \end{aligned}$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{''} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots$$

Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST **and not** SAST**:**

$\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\begin{aligned} \{1 : \mathsf{f}(0)\} &\to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\} \\ &\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots \end{aligned}$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\}$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{\nicefrac{1}{2} : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), \nicefrac{1}{2} : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{\nicefrac{1}{2} : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \nicefrac{1}{2} : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{\nicefrac{1}{4} : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \nicefrac{3}{4} : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}}^{k} \{(\nicefrac{1}{2})^{k} : \mathsf{f}(\mathsf{s}^{k}(0)), 1 - (\nicefrac{1}{2})^{k} : 0\}$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$$\mathcal{R}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}}^{k} \{(1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{(1/2)^k : \mathsf{g}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \ldots$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}}^{k} \{(1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{(1/2)^k : \mathsf{g}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST **and not** SAST**:**

$$\mathcal{R}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{''} \end{array}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}}^{k} \{(1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \{(1/2)^k : \mathsf{g}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

   $\mathbb{E}(\vec{\mu})$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$\mathcal{R}$:
$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{''} \end{aligned}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\begin{aligned} \{1 : \mathsf{f}(0)\} &\to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\} \\ &\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots \end{aligned}$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\begin{aligned} \{1 : \mathsf{f}(0)\} &\to_{\mathcal{R}}^{k} \{(1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \\ &\to_{\mathcal{R}} \{(1/2)^k : \mathsf{g}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots \end{aligned}$$

   $\mathbb{E}(\vec{\mu}) \approx (1/2)^k \cdot 4^k = 2^k < \infty$

AST vs. PAST vs. SAST

PAST and not SAST:

$$\mathcal{R}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

Starting with $\{1 : \mathsf{f}(0)\}$:

1. Only using the first f-rule:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{1/4 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), 3/4 : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

   Coin Flip $\Rightarrow \mathbb{E}(\vec{\mu}) = 2 < \infty$

2. Using the first f-rule k-times:

$$\{1 : \mathsf{f}(0)\} \to_{\mathcal{R}}^{k} \{(1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\}$$
$$\to_{\mathcal{R}} \{(1/2)^k : \mathsf{g}(\mathsf{s}^k(0)), 1 - (1/2)^k : 0\} \to_{\mathcal{R}} \dots$$

   $\mathbb{E}(\vec{\mu}) \approx (1/2)^k \cdot 4^k = 2^k < \infty$ but unbounded!

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

2. Modularity of $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

3. $\mathtt{PAST} \approx \mathtt{SAST}$ for PTRSs

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

2. Modularity of $\texttt{AST}$, $\texttt{PAST}$, and $\texttt{SAST}$

3. $\texttt{PAST} \approx \texttt{SAST}$ for PTRSs

Modularity AST

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \quad \to \quad \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \quad \to \quad \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Shared Constructor Systems: Yes

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Shared Constructor Systems: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \to \{1/2 : \mathsf{f}(x), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(x))\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(0) \to \{1/2 : \mathsf{s}(0), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{g}^2(0))\}$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Shared Constructor Systems: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \to \{1/2 : \mathsf{f}(x), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(x))\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(0) \to \{1/2 : \mathsf{s}(0), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{g}^2(0))\}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\}$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Shared Constructor Systems: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \to \{1/2 : \mathsf{f}(x), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(x))\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(0) \to \{1/2 : \mathsf{s}(0), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{g}^2(0))\}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_2} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(0))))\}$$

Modularity AST

Disjoint Unions: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{f}^2(x)\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : x, 1/2 : \mathsf{g}^2(x)\}$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))$$

Shared Constructor Systems: Yes

$\mathcal{R}_1$: AST

$$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \to \{1/2 : \mathsf{f}(x), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}^2(x))\}$$

$\mathcal{R}_2$: AST

$$\mathsf{g}(0) \to \{1/2 : \mathsf{s}(0), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{g}^2(0))\}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_2} \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(0))))\} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Modularity PAST

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\}$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{rl} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

Modularity $\mathtt{PAST}$

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: $\mathtt{PAST}$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathtt{PAST}$

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{aligned}$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{aligned}$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} \; & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu})$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{ll} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{''} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 +$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{”} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \dots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \dots \quad , \quad \dots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{rl} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot 2^k$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{ll} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{ll} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \dots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \dots \quad , \quad \dots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Modularity PAST

Disjoint Unions: No

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

$\mathcal{R}_2$: PAST

$$\mathsf{b}(x) \to \mathsf{c}(x, x)$$

$$\begin{array}{ll} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Shared Constructor Systems: No

Modularity SAST

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{{}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), {}^3\!/\!_4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) \to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\}$$
$$\mathsf{f}(0) \to \{1 : 0\}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\mathsf{g}(x) \to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\}$$
$$\mathsf{d}(x) \to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\}$$
$$\to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) \to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(y))\}$$
$$\mathsf{f}(0) \to \{1 : 0\}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\mathsf{g}(x) \to \{{}^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), {}^3/_4 : x\}$$
$$\mathsf{d}(x) \to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\}$$

$$\{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\}$$
$$\to^{k}_{\mathcal{R}_2} \{\ldots, ({}^1/_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\}$$
$$\to^{k}_{\mathcal{R}_2} \{\ldots, ({}^1/_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x, x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_1}^{2^{k-1}-1} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \ldots\} \end{aligned}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \; & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \; & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_1}^{2^{k-1}-1} \; & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \ldots\} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\vec{\mu})$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_1}^{2^{k-1}-1} \quad & \{\ldots, (1/2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \ldots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + (1/2)^2 \cdot 2 + (1/2)^3 \cdot 2^2$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), 3/4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\dots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \dots\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\dots, (1/2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \dots\} \\ \to_{\mathcal{R}_1}^{2^{k-1}-1} \quad & \{\dots, (1/2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \dots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + (1/2)^2 \cdot 2 + (1/2)^3 \cdot 2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{{}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), {}^3\!/\!_4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/\!_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_2}^{k} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/\!_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to_{\mathcal{R}_1}^{2^{k-1}-1} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/\!_2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \ldots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + ({}^1\!/\!_2)^2 \cdot 2 + ({}^1\!/\!_2)^3 \cdot 2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Modularity SAST

Disjoint Unions: Yes (no details)

Shared Constructor Systems: No

$\mathcal{R}_1$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{c}(x,y)) &\to \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(y))\} \\ \mathsf{f}(0) &\to \{1 : 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_2$: SAST

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(x) &\to \{{}^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{d}(x)), {}^3\!/_4 : x\} \\ \mathsf{d}(x) &\to \{1 : \mathsf{c}(x,x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{g}(0))\} \\ \to^{k}_{\mathcal{R}_2} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{d}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to^{k}_{\mathcal{R}_2} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/_2)^k : \mathsf{f}(\mathsf{c}^{k-1}(0)), \ldots\} \\ \to^{2^{k-1}-1}_{\mathcal{R}_1} \quad & \{\ldots, ({}^1\!/_2)^k : \mathsf{c}^{k-1}(0) \quad , \ldots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 + ({}^1\!/_2)^2 \cdot 2 + ({}^1\!/_2)^3 \cdot 2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Modularity for PTRSs

Innermost Rewriting with ...	AST	PAST	SAST
Disjoint Unions	Yes	No	Yes
Shared Constructors	Yes	No	No
Hierarchical Systems	???	No	???

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

2. Modularity of $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

3. $\mathtt{PAST} \approx \mathtt{SAST}$ for PTRSs

Overview

1. Introduce Probabilistic Notions of Termination:

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

2. Modularity of $\texttt{AST}$, $\texttt{PAST}$, and $\texttt{SAST}$

3. $\texttt{PAST} \approx \texttt{SAST}$ for PTRSs

PAST and Signature Extensions

PAST and Signature Extensions

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{''} \end{array}$$

PAST and Signature Extensions

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x) &\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) &\to \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{``}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) &\to \Theta(4^k)\text{''} \end{aligned}$$

Consider $\mathcal{R}_1$ with an additional $\mathsf{c}(\circ, \circ)$:

PAST and Signature Extensions

$\mathcal{R}_1$: PAST

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x) & \to & \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{s}(x)), 1/2 : 0\} \\ \mathsf{f}(x) & \to & \{1 : \mathsf{g}(x)\} \\ \text{“}\mathsf{g}(\mathsf{s}^k(x)) & \to & \Theta(4^k)\text{”} \end{array}$$

Consider $\mathcal{R}_1$ with an additional $\mathsf{c}(\circ, \circ)$:

$$\begin{array}{rl} & \{1 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(0), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{1/2 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , 1/4 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/4 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^2(0)), \mathsf{f}(0))\} \\ \to_{\mathcal{R}_1} & \{ \quad \ldots \quad , \quad \ldots \quad , 1/8 : \mathsf{c}(0, \mathsf{f}(0)), 1/8 : \mathsf{c}(\mathsf{f}(\mathsf{s}^3(0)), \mathsf{f}(0))\} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\vec{\mu}) \geq 1/2 \cdot 2^1 + 1/4 \cdot 2^2 + 1/8 \cdot 2^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

SAST $\approx$ PAST

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \mathtt{PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is } \mathtt{SAST}$$

$\mathtt{SAST} \approx \mathtt{PAST}$

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \mathtt{PAST} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \text{ is } \mathtt{SAST}$$

Idea:

$\mathtt{SAST} \approx \mathtt{PAST}$

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \mathtt{PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is } \mathtt{SAST}$$

Idea:

1. Let $\mathcal{R}$ be PAST but not SAST

SAST $\approx$ PAST

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is SAST}$$

Idea:

1. Let $\mathcal{R}$ be PAST but not SAST
2. Let t be a term such that $\mathbb{E}(\mu_t)$ is unbounded

$\mathtt{SAST} \approx \mathtt{PAST}$

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \mathtt{PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is } \mathtt{SAST}$$

Idea:

1. Let $\mathcal{R}$ be PAST but not SAST
2. Let t be a term such that $\mathbb{E}(\mu_t)$ is unbounded
3. Start with $\mathsf{c}(t,t)$ and create a sequence $\mu_{\mathsf{c}(t,t)}$

SAST ≈ PAST

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is SAST}$$

Idea:

1. Let $\mathcal{R}$ be PAST but not SAST
2. Let t be a term such that $\mathbb{E}(\mu_t)$ is unbounded
3. Start with $\mathsf{c}(t, t)$ and create a sequence $\mu_{\mathsf{c}(t,t)}$
4. Use first t to create infinitely many copies of second t

SAST ≈ PAST

Theorem: Equivalence of PAST and SAST

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is PAST} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \text{ is SAST}$$

Idea:

1. Let $\mathcal{R}$ be PAST but not SAST
2. Let t be a term such that $\mathbb{E}(\mu_t)$ is unbounded
3. Start with $\mathsf{c}(t, t)$ and create a sequence $\mu_{\mathsf{c}(t,t)}$
4. Use first t to create infinitely many copies of second t
5. $\mathbb{E}(\mu_{\mathsf{c}(t,t)}) = \infty$ as before $\Rightarrow$ not PAST

Summary

- Definition and Differences between $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

Summary

- Definition and Differences between $\mathtt{AST}$, $\mathtt{PAST}$, and $\mathtt{SAST}$

$$\mathtt{SAST} \subsetneq \mathtt{PAST} \subsetneq \mathtt{AST}$$

- $\mathtt{PAST}$ and $\mathtt{SAST}$ are very closely related for rewriting

Theorem: Equivalence of $\mathtt{PAST}$ and $\mathtt{SAST}$

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \mathtt{PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is } \mathtt{SAST}$$

Summary

- Definition and Differences between $\texttt{AST}$, $\texttt{PAST}$, and $\texttt{SAST}$

$$\texttt{SAST} \subsetneq \texttt{PAST} \subsetneq \texttt{AST}$$

- $\texttt{PAST}$ and $\texttt{SAST}$ are very closely related for rewriting

Theorem: Equivalence of $\texttt{PAST}$ and $\texttt{SAST}$

If a PTRS $\mathcal{P}$ has only finitely many rules and the corresponding signature contains a function symbol of at least arity 2, then:

$$\mathcal{P} \text{ is } \texttt{PAST} \iff \mathcal{P} \text{ is } \texttt{SAST}$$

- Modularity

	AST	PAST	SAST
Disjoint Unions	Yes	No	Yes
Shared Constructors	Yes	No	No