Dependency Tuples for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Jan-Christoph Kassing, Jürgen Giesl

August 2023

Termination and Complexity Analysis for Programs

Termination and Complexity Analysis for Programs

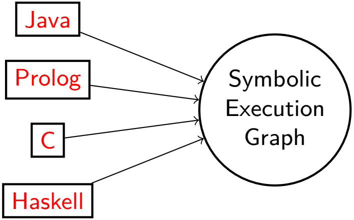
Java

Prolog

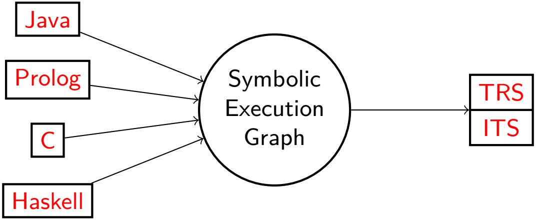
C

Haskell

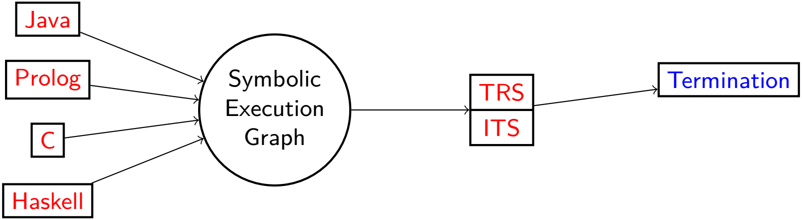
Termination and Complexity Analysis for Programs



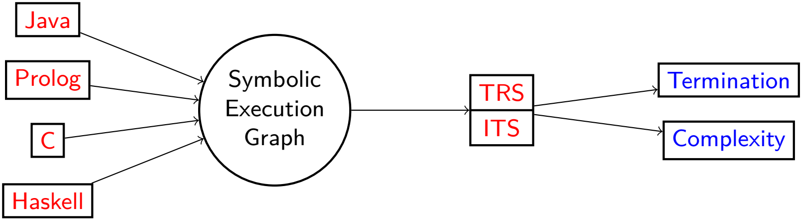
Termination and Complexity Analysis for Programs



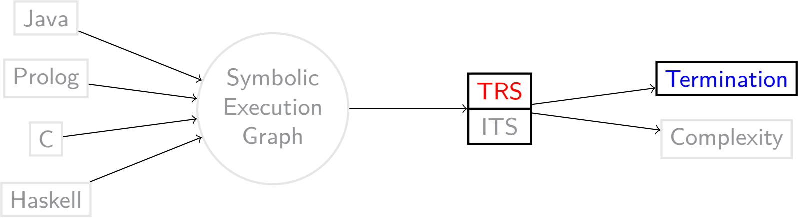
Termination and Complexity Analysis for Programs



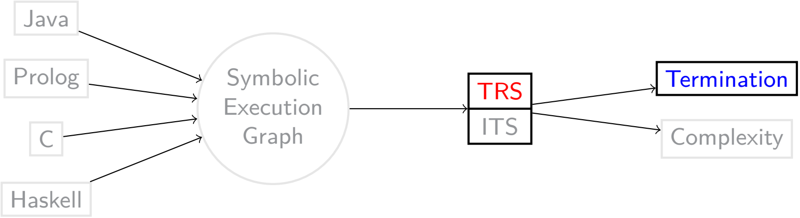
Termination and Complexity Analysis for Programs



Termination and Complexity Analysis for Programs

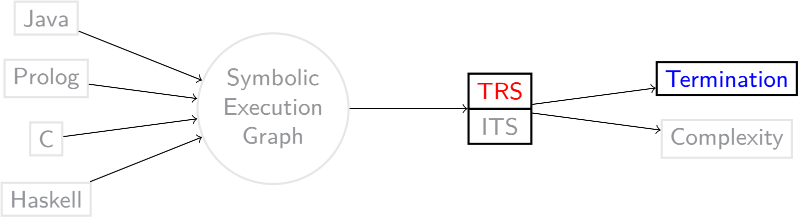


Termination and Complexity Analysis for Programs



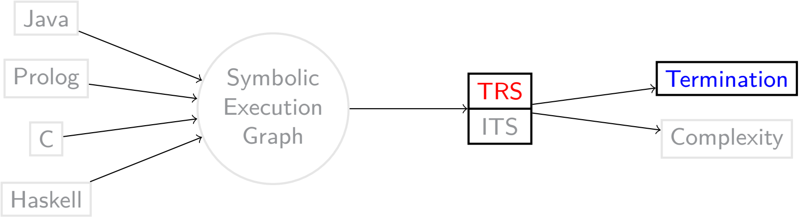
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



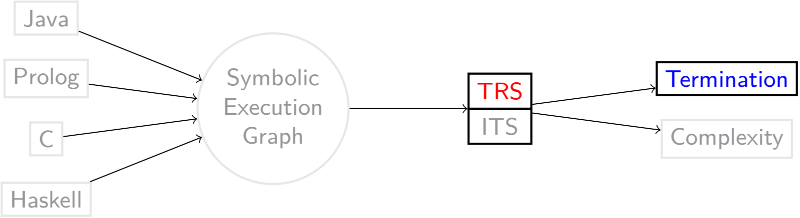
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



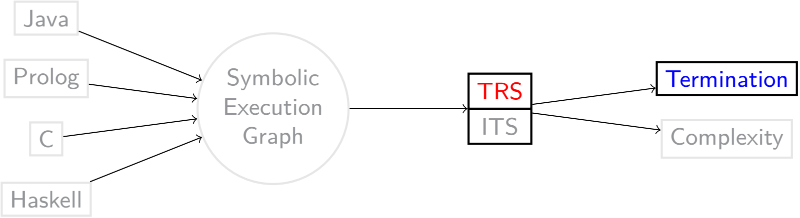
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs
4. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs
4. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\rightarrow y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Goal: Find well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\succ y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\succ \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Goal: Find well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\succ y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\succ \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \succ & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \succ & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

***Pol* monotonic, natural polynomial interpretation**

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) &> Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) & > & Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) & > & Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}_{Pol}(\mathcal{O}_{Pol}, y) &> y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}_{Pol}(0, y) &> y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + y + 1 &> y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$y + 1 > y$$
$$Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) > Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)))$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\mathcal{O}_{Pol} = 0$$
$$\mathsf{s}_{Pol}(x) = x + 1$$
$$\mathsf{plus}_{Pol}(x, y) = 2x + y + 1$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$y + 1 \quad > \quad y$$
$$\mathsf{plus}_{Pol}(\mathsf{s}_{Pol}(x), y) \quad > \quad \mathsf{s}_{Pol}(\mathsf{plus}_{Pol}(x, y))$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$y + 1 \;>\; y$$
$$\mathsf{plus}_{Pol}(x+1, y) \;>\; \mathsf{s}_{Pol}(2x + y + 1)$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\mathcal{O}_{Pol} = 0$$
$$\mathsf{s}_{Pol}(x) = x + 1$$
$$\mathsf{plus}_{Pol}(x, y) = 2x + y + 1$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ 2(x+1)+y+1 & > & (2x+y+1)+1 \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x,y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y + 1 & > & y \\ 2x + y + 3 & > & 2x + y + 2 \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1979]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ 2x+y+3 & > & 2x+y+2 \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x,y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ proves termination

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

- There exists no monotonic, natural *Pol* that orders all rules strictly

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

- There exists no monotonic, natural *Pol* that orders all rules strictly
- Dependency pair approach is able to prove termination

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$
\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{array}{rcl}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

Defined Symbols: minus and div

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$
\mathcal{R}_{div}: \quad
\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root symbol}\}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{array}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

Dependency Pairs

If $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $g(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $f^{\#}(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to g^{\#}(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$
\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{array}{rcl}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\
\mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\}
\end{array}
$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{aligned}$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{array}$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\
\mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\}
\end{aligned}$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\
\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y)
\end{aligned}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\
\mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\}
\end{array}
$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \ldots$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O}))$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \; t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} m(x, \mathcal{O}) &\to x \\ m(s(x), s(y)) &\to m(x, y) \\ d(\mathcal{O}, s(y)) &\to \mathcal{O} \\ d(s(x), s(y)) &\to s(d(m(x, y), s(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(s(x), s(y)) &\to M(x, y) \\ D(s(x), s(y)) &\to M(x, y) \\ D(s(x), s(y)) &\to D(m(x, y), s(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & D(s^4(\mathcal{O}), s^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \ & D(m(s^3(\mathcal{O}), s(\mathcal{O})), s^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \ & D(s^2(\mathcal{O}), s^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \ & M(s(\mathcal{O}), s(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \ & M(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x,y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x,y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x,y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}),\mathsf{s}(\mathcal{O})),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathsf{s}(\mathcal{O}),\mathsf{s}(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Theorem: Chain Criterion [Arts & Giesl 2000]

$\mathcal{R}$ is innermost terminating iff $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}),\mathcal{R})$ is innermost terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems

- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems

- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating, then all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b)\quad & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c)\quad & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d)\quad & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2)\quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3)\quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{aligned}
$$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{aligned}
(a)&\quad m(x, \mathcal{O}) \to x\\
(b)&\quad m(s(x), s(y)) \to m(x, y)\\
(c)&\quad d(\mathcal{O}, s(y)) \to \mathcal{O}\\
(d)&\quad d(s(x), s(y)) \to s(d(m(x, y), s(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1)&\quad M(s(x), s(y)) \to M(x, y)\\
(2)&\quad D(s(x), s(y)) \to M(x, y)\\
(3)&\quad D(s(x), s(y)) \to D(m(x, y), s(y))
\end{aligned}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{llcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll}(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\end{array}$$

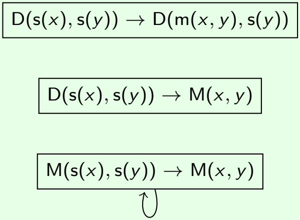
$$\begin{array}{ll}(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))\end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

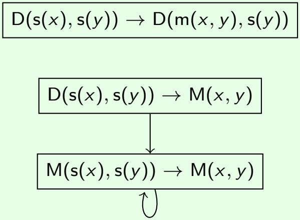
- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a) \quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b) \quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c) \quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d) \quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

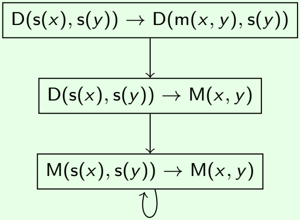
$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

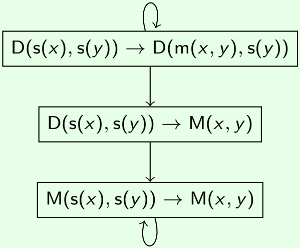
$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

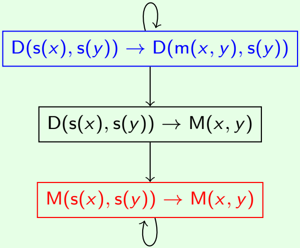
$(1)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(2)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div}), (\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})\}$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{aligned}
(a)&\quad \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x\\
(b)&\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y)\\
(c)&\quad \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}\\
(d)&\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1)&\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)\\
(2)&\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)\\
(3)&\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))
\end{aligned}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol*

weakly-monotonic

- weakly-monotonic: if $x \geq y$, then $f_{Pol}(\ldots,x,\ldots) \geq f_{Pol}(\ldots,y,\ldots)$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll}(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))\end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{llcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x
\end{array}
$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$(1)\ \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ},\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x+1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) &= x \\ \mathsf{d}_{Pol}(x,y) &= x \end{aligned}$$

$(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$(1)\ \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x
\end{array}
$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x, y) = x$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & Pol(\mathsf{m}(x,\mathcal{O})) & \geq & Pol(x)\\
(b) & Pol(\mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) & \geq & Pol(\mathsf{m}(x,y))\\
(c) & Pol(\mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y))) & \geq & (\mathcal{O})\\
(d) & Pol(\mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) & \geq & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))))
\end{array}
$$

$$(1)\ Pol(\mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) > Pol(\mathsf{M}(x,y))$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0\\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1\\
\mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x\\
\mathsf{d}_{Pol}(x,y) & = & x
\end{array}
$$

$(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x,y) = x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{\succ},\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & x \geq x \\ (b) & x+1 \geq x \\ (c) & 0 \geq 0 \\ (d) & x+1 \geq x+1 \end{array}$$

$$(1) \qquad x+1 > x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x+1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) &= x \\ \mathsf{d}_{Pol}(x,y) &= x \end{aligned}$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x,y) = x$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) &= x \\ \mathsf{d}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x, y) = x$$

$(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}$$

$$(3)\ \ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x
\end{array}$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x, y) \quad = \quad x$$

$(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{aligned}
(a)&\quad \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x\\
(b)&\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y)\\
(c)&\quad \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}\\
(d)&\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

$$(3)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{\succ},\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{Pol} &= 0\\
\mathsf{s}_{Pol}(x) &= x+1\\
\mathsf{m}_{Pol}(x,y) &= x\\
\mathsf{d}_{Pol}(x,y) &= x
\end{aligned}
$$

$(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x,y) = x$$

$(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{D}_{Pol}(x,y) = x$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & Pol(\mathsf{m}(x,\mathcal{O})) & \geq & Pol(x) \\
(b) & Pol(\mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) & \geq & Pol(\mathsf{m}(x,y)) \\
(c) & Pol(\mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y))) & \geq & (\mathcal{O}) \\
(d) & Pol(\mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) & \geq & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))))
\end{array}
$$

$$(3)\ Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) > Pol(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x \\
\mathsf{d}_{Pol}(x,y) & = & x
\end{array}
$$

$(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x,y) = x$$

$(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{D}_{Pol}(x,y) = x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{\succ},\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & x \geq x \\ (b) & x+1 \geq x \\ (c) & 0 \geq 0 \\ (d) & x+1 \geq x+1 \end{array}$$

$$(3) \quad x+1 > x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x \\ \mathsf{d}_{Pol}(x,y) & = & x \end{array}$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x,y) = x$$

$(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{D}_{Pol}(x,y) = x$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\varnothing, \mathcal{R}_{div})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\varnothing, \mathcal{R}_{div})\}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x
\end{array}
$$

$(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}_{Pol}(x, y) = x$$

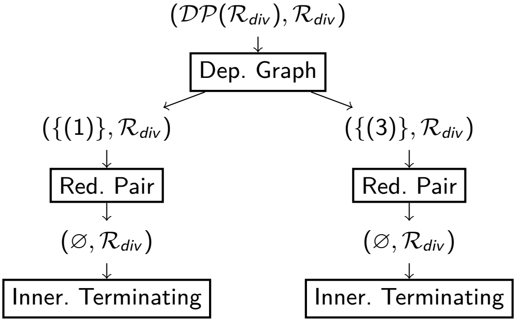
$(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{D}_{Pol}(x, y) = x$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Final Innermost Termination Proof



$\Rightarrow$ **Innermost termination is proved automatically!**

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathrm{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathcal{O})) \}$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, {}^1\!/_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^1\!/_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^1\!/_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ {}^1\!/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$
\begin{aligned}
& \{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),
\end{aligned}
$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\begin{aligned}
& \{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \quad & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}
\end{aligned}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, . . .]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ \,^1\!/_2 : \mathcal{O},\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\, \}$

Distribution: $\{ \, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \, \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\begin{aligned}
& \{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1\!/_2 : \mathcal{O},\ ^1\!/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1\!/_2 : \mathcal{O},\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ ^1\!/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1\!/_2 : \mathcal{O},\ ^1\!/_8 : \mathcal{O},\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1\!/_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}
\end{aligned}$$

Termination for PTRSs [Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\begin{aligned} & \{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \\ \rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \\ \rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ ^1/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \\ \rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\} \end{aligned}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, . . .]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ ^1/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$ 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$ $\quad 0$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$ $\quad 1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ — $|\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$ — 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$ — $1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$ — $1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ — No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution:	$\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$	$\lvert\mu\rvert$
	$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$	0
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$	$5/8$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} \lvert\mu_n\rvert = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$$
\begin{array}{lll}
 & \{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \} & 0 \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \} & 1/2 \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \} & 1/2 \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} & \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \} & 5/8
\end{array}
$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, . . .]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ Yes

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad \mathsf{g}(x) \to \{\tfrac{1}{2} : x,\ \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x))\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \qquad \mathrm{g}(x) \;\to\; \{\, \tfrac{1}{2} : x,\ \tfrac{1}{2} : \mathrm{g}(\mathrm{g}(x)) \,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad \mathrm{g}(x) \to \{\, \tfrac{1}{2} : x,\ \tfrac{1}{2} : \mathrm{g}(\mathrm{g}(x)) \,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathrm{g}_{Pol}(x) = 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad g(x) \to \{ \tfrac{1}{2} : x, \ \tfrac{1}{2} : g(g(x)) \}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) = 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \to \quad \{\, \tfrac{1}{2} : x,\ \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x))\,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathsf{g}_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad \{ \tfrac{1}{2} : x, \; \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathsf{g}_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (2 + x)$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad 1 + x$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad 1 + x$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

$\Rightarrow$ proves AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A) : \quad \{\, \ell^{\#} \to \{p_1 : t_1^{\#}, \ldots, p_j : t_j^{\#}, \ldots, p_k : t_k^{\#}\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k \,\}$$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\perp$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \dots, p_j : t_j^\#, \dots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\bot$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\bot$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\perp$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \perp\}$	AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \perp\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \perp\}$	not AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \perp\}$	AST ↯

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t_{1,1}^\#, \ldots, t_{1,i_1}^\#), \ \ldots \ , p_k : \mathtt{Com}(t_{k,1}^\#, \ldots, t_{k,i_k}^\#)\}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), \; \ldots \;, p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G},\mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G},\mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST
$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_2)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G},\mathsf{G},\mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), \; \dots \;, p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\mathcal{R}_3 : \quad \begin{array}{rl} \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3 : \quad & \mathsf{f}(\mathcal{O}) && \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} && \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : \quad & \mathsf{F}(\mathcal{O}) && \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\}
\end{aligned}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), \ \dots \ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
 & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
 & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\}
\end{array}
$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1:\mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2:\mathsf{b}, 1/2:\mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1:\mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}),\mathsf{A})\} \\ & \color{red}{\mathsf{A}} & \color{red}{\to \{1/2:\mathsf{B}, 1/2:\mathsf{C}\}} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{rl} & \{\ 1:\mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1:\mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2:\mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2:\mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}),\mathcal{R})$:

$$\begin{array}{rl} & \{\ 1:\mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1:\mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}),\color{red}{\mathsf{A}})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2:\mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}),\mathsf{B}), 1/2:\mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}),\mathsf{C})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B}), \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{rl} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{array}{rl} & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B}), \\ & \ \ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{C}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3: \quad & \mathsf{f}(\mathcal{O}) && \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} && \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): \quad & \mathsf{F}(\mathcal{O}) && \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
& \mathsf{A} && \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{aligned}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
& \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3}\ & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3}\ & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{aligned}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{aligned}
& \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)}\ & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)}\ & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3}\ & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), {\color{red}1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B})}, \\
& \quad {\color{red}1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{C})}, 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\}
\end{aligned}$$

- The red terms do not correspond to a term in the original rewrite sequence
- One cannot simulate original rewrite sequences by chains

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$ - as multiset

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \ell^{\#} \quad \to \{p_1 : \ \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}) \quad , \ \ldots \ , p_k : \ \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}) \quad \}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \dots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \dots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\mathcal{R}_3: \quad \begin{aligned} \mathsf{f}(\mathcal{O}) &\to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ \mathsf{a} &\to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \end{aligned}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \dots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \dots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\
& \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\}
\end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\}
\end{array}
$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$\{ \ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\}$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
& \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll}
& \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}
\end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\}
\end{array}
$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & f(\mathcal{O}) & \to \{1 : f(a)\}, \\ & a & \to \{1/2 : b, 1/2 : c\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle F(\mathcal{O}), f(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(F(a), A), f(a)\rangle\} \\ & \langle A, a\rangle & \to \{1/2 : \langle B, b\rangle, 1/2 : \langle C, c\rangle\} \end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : f(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : f(a)\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : f(b), 1/2 : f(c)\} \end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\{\ 1 : F(\mathcal{O})\}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
& \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{ll}
& \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$\begin{array}{ll}
& \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\}
\end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}
$$

Sequence with $\mathcal{R}$:

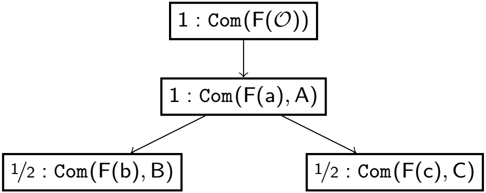
$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

Sequence with $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\}
\end{array}
$$

Probabilistic Chain

$$
\begin{array}{llcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to & \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to & \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to & \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to & \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\}
\end{array}
$$

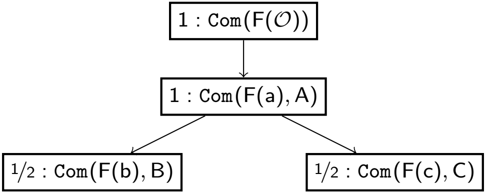


Chain: On every path, we use a dependency pair after a finite number of steps.

$$(\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}})$$

Probabilistic Chain

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R}_3: & f(\mathcal{O}) & \to \{1 : f(a)\}, \\ & a & \to \{1/2 : b, 1/2 : c\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle F(\mathcal{O}), f(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(F(a), A), f(a)\rangle\} \\ & \langle A, a\rangle & \to \{1/2 : \langle B, b\rangle, 1/2 : \langle C, c\rangle\} \end{array}$$



Chain: On every path, we use a dependency pair after a finite number of steps.

$$(\xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}^{*}_{\mathcal{R}})$$

Theorem: Chain Criterion

$\mathcal{R}$ is innermost AST if $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$ is innermost AST

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathcal{DT}(1) = \quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x,y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}
\end{array}$$

$$\mathcal{DT}(1) = \mathsf{M}(x,\mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com}\}$$

$$\mathcal{DT}(2) = \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x,y)\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathcal{DT}(1) = \quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\}$$

$$\mathcal{DT}(2) = \quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ \quad 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$$

$$\mathcal{DT}(3) = \quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\mathcal{DT}(1) = & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ & 1 : \mathtt{Com}\} \\
\mathcal{DT}(2) = & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ & 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
\mathcal{DT}(3) = & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ & 1 : \mathtt{Com}\} \\
\mathcal{DT}(4) = & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ & 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
& & & & 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS

- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency tuples: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency tuples: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS

- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency tuples: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST, then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency tuples: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $Proc(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST, then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST, then all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{llcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\, 1 : \mathtt{Com} \,\} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1 : \mathtt{Com} \,\} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{llcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \phantom{\{} 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

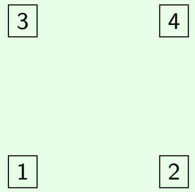
$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

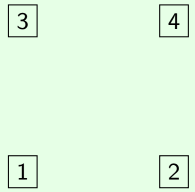
$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{\, 1 : \mathtt{Com}\,\}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\, 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{\, 1 : \mathtt{Com}\,\}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\, 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),$
$\quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

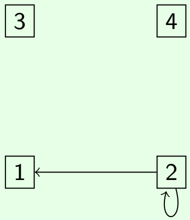
- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : c_1, \ldots, p_k : c_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \lhd c_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y) \} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \phantom{\{} 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y)) \}
\end{array}
$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : c_1, \ldots, p_k : c_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq c_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

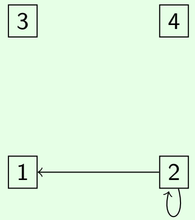
(a) $\mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),$
$1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : c_1, \ldots, p_k : c_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq c_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

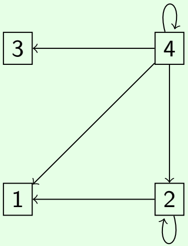
(a) $\mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

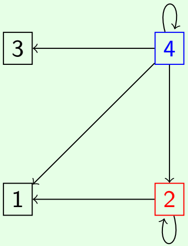
- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : c_1, \ldots, p_k : c_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq c_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
$(4)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),$
$\qquad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

$$= \{(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div}), (\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})\}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : c_1, \ldots, p_k : c_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq c_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{aligned}
(a) &\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\} \\
(b) &\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) &\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) &\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) &\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) &\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) &\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
&\qquad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{aligned}
$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, Com-additive, natural polynomial interpretation *Pol* such that

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\,\} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\,\} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, Com-additive, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:

$$Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(r_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, Com-additive, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:

$$Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(r_j)$$

- For all $\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \mu = \{p_1 : \langle c_1, r_1 \rangle, \ldots, p_k : \langle c_k, r_k \rangle\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(c_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\, 1 : \mathtt{Com}\,\} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1 : \mathtt{Com}\,\} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\, 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, Com-additive, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:
$$Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(r_j)$$
- For all $\langle \ell^\#, \ell \rangle \to \mu = \{p_1 : \langle c_1, r_1 \rangle, \ldots, p_k : \langle c_k, r_k \rangle\}$ in $\mathcal{P}$:
$$Pol(\ell^\#) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(c_j)$$
- For all $\langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle c_1, r_1 \rangle, \ldots, p_k : \langle c_k, r_k \rangle\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with
$$Pol(\ell^\#) > Pol(c_j)$$
If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is in $\mathcal{S}$, then we additionally require
$$Pol(\ell) \geq Pol(r_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div}) :$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x + 2 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 & \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 \\
\mathtt{Com}_{Pol}(x, y) & = & x + y & & &
\end{array}
$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{llcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x + 2 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 & \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 \\
\mathtt{Com}_{Pol}(x, y) & = & x + y & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) & \geq & 1/2 \cdot Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) \\
 & & + 1/2 \cdot Pol(\mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y)))
\end{array}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : \mathtt{Com}\} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathtt{Com}\} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x + 2 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 & \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 \\
\mathtt{Com}_{Pol}(x, y) & = & x + y & & &
\end{array}
$$

$$2x + 3 \quad \geq \quad {}^1\!/_2 \cdot (2x + 3) + {}^1\!/_2 \cdot (2x + 2)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{rrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} (1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x + 2 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 & \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 \\ \mathtt{Com}_{Pol}(x, y) & = & x + y & & & \end{array}$$

$$2x + 3 \quad \geq \quad 2x + 2 + 1/2$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x + 2 \\
\mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x, y) & = & x \\
\mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 & \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x + 1 \\
\mathtt{Com}_{Pol}(x, y) & = & x + y & & &
\end{array}
$$

$$2x + 3 \geq 2x + 2 + 1/2$$

and

$$Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) = 2x + 3 > 2x + 2 = Pol(\mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y)))$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{rrcl}(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\ (4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\ & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}\end{array}$$

$(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$:

$$\begin{array}{rcl rcl}\mathcal{O}_{Pol} & = & 0 & \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & 2x+2 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x & \mathsf{d}_{Pol}(x,y) & = & x \\ \mathsf{M}_{Pol}(x,y) & = & x+1 & \mathsf{D}_{Pol}(x,y) & = & x+1 \\ \mathtt{Com}_{Pol}(x,y) & = & x+y & & & \end{array}$$

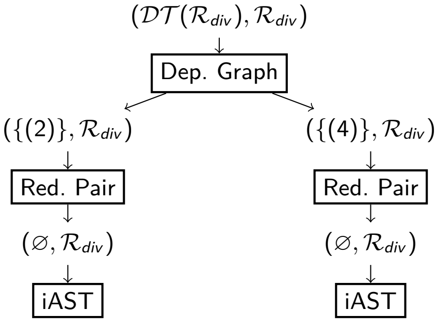
$$2x+3 \quad \geq \quad 2x+2+{}^{1}\!/_{2}$$

and

$$Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y))) = 2x+3 > 2x+2 = Pol(\mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)),\mathsf{M}(x,y)))$$

$$Proc_{RP}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\varnothing, \mathcal{R}_{div})\}$$

Final Innermost Almost-Sure Termination Proof



$\Rightarrow$ **Innermost almost-sure termination is proved automatically!**

Implementation and Experiments

- Fully implemented in AProVE
- Evaluated on 67 benchmarks (61 iAST / 59 AST)

	AProVE	DPs	Direct Polo	NaTT2
iAST	53	51	27	22
AST	27	-	27	22

Probabilistic Quicksort:

$$\begin{aligned}
\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1/2 : \mathsf{cons}(x, xs), 1/2 : \mathsf{rotate}(\mathsf{app}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})))\} \\
\mathsf{qs}(\mathsf{nil}) &\to \{1 : \mathsf{nil}\} \\
\mathsf{qs}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{qsHelp}(\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)))\} \\
\mathsf{qsHelp}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{app}(\mathsf{qs}(\mathsf{low}(x, xs)), \mathsf{cons}(x, \mathsf{qs}(\mathsf{high}(x, xs))))\} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle,\ \ldots\ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \texttt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \texttt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

- Adapted the main processors and added more:
  - Dependency Graph Processor
  - Reduction Pair Processor
  - Probability Removal Processor
  - Usable Terms Processor
  - Usable Rules Processor

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

- Adapted the main processors and added more:
  - Dependency Graph Processor
  - Reduction Pair Processor
  - Probability Removal Processor
  - Usable Terms Processor
  - Usable Rules Processor

- Fully implemented in AProVE.