Proving Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting Using Dependency Pairs

Jan-Christoph Kassing, Jürgen Giesl

Juni 2023

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Computation "2 + 2":

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))$$

Computation "2 + 2":

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Computation "2 + 2":

$$\begin{array}{rl} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Computation "2 + 2":

$$\begin{aligned} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))))) \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Computation "2 + 2":

$$\begin{aligned} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Computation "2 + 2":
$$\begin{array}{ll} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \end{array}$$

$\mathcal{R}$ is terminating iff there exists no infinite evaluation $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \dots$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Computation "2 + 2":

$$\begin{aligned} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ is terminating iff there exists no infinite evaluation $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Goal: Find a well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

Automatic Termination Analysis for TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Computation "2 + 2":
$$\begin{aligned} & \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))))) \\ \to_{\mathcal{R}_{plus}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ is terminating iff there exists no infinite evaluation $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \dots$

Goal: Find a well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

$\succ$ well-founded

There exists no infinite sequence $t_0 \succ t_1 \succ t_2 \succ \dots$

Termination and Complexity Analysis for Programs

Termination and Complexity Analysis for Programs

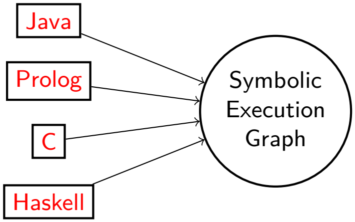
Java

Prolog

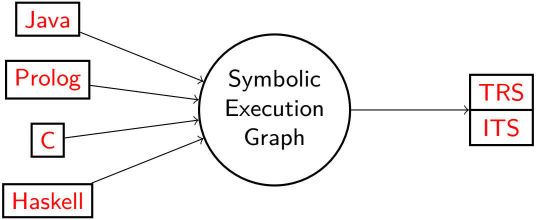
C

Haskell

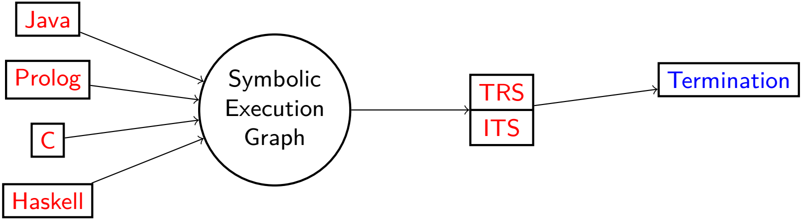
Termination and Complexity Analysis for Programs



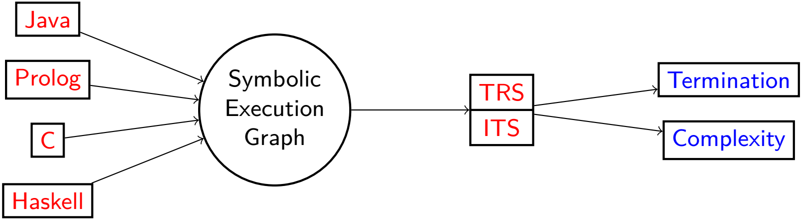
Termination and Complexity Analysis for Programs



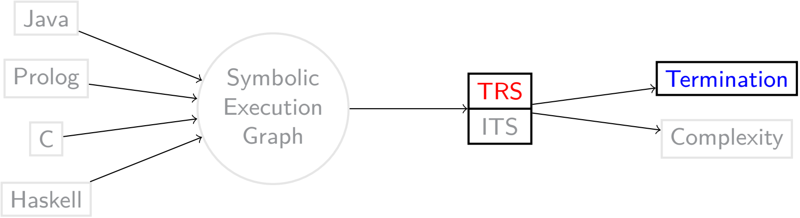
Termination and Complexity Analysis for Programs



Termination and Complexity Analysis for Programs

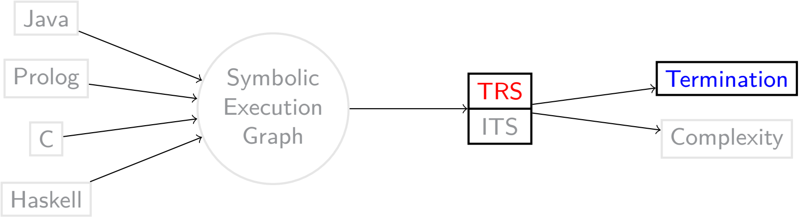


Termination and Complexity Analysis for Programs



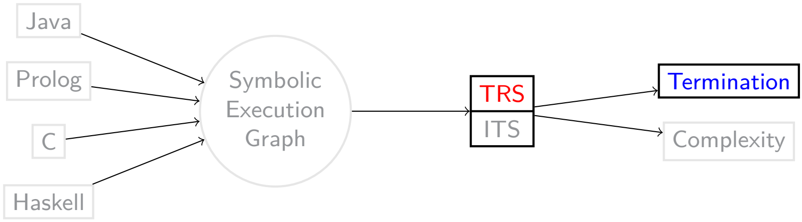
- TRS: especially good for the analysis of algorithms concerning algebraic structures and user-defined data structures

Termination and Complexity Analysis for Programs

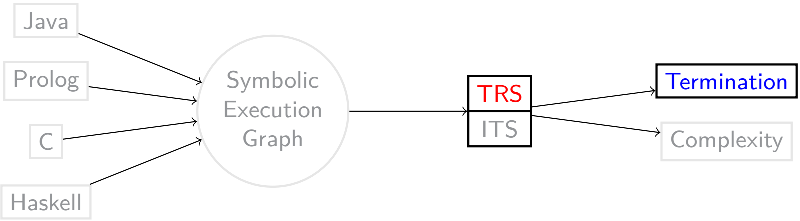


- TRS: especially good for the analysis of algorithms concerning algebraic structures and user-defined data structures
- Turing-complete programming language
  $\Rightarrow$ Termination is undecidable

Termination and Complexity Analysis for Programs

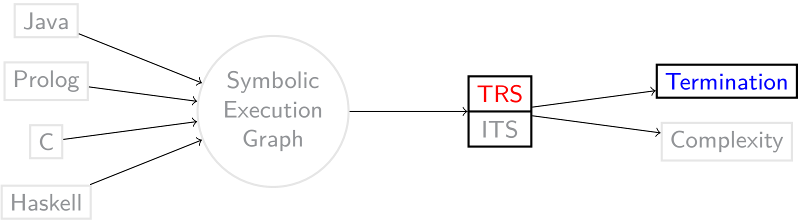


Termination and Complexity Analysis for Programs



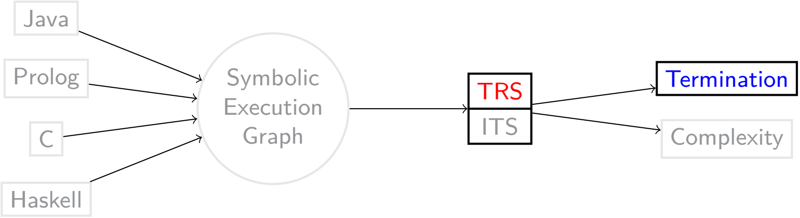
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



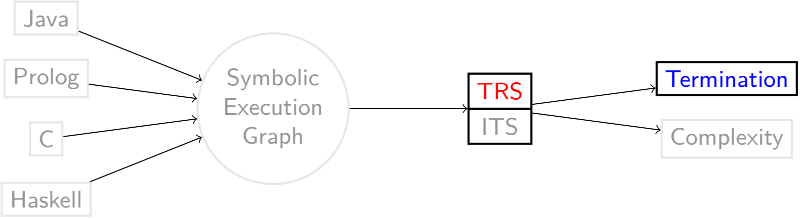
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



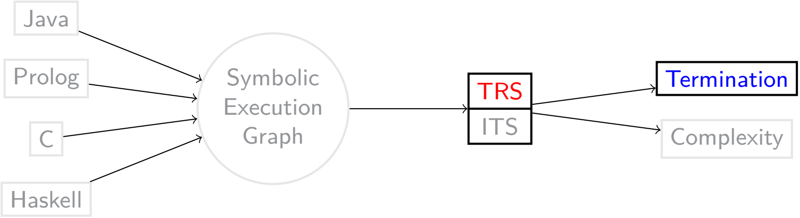
1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs
4. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

Termination and Complexity Analysis for Programs



1. Direct application of polynomials for termination of TRSs
2. DP framework for innermost termination of TRSs
3. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs
4. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Goal: Find well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\succ y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\succ \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Goal: Find well-founded order $\succ$ such that $s \to_{\mathcal{R}} t$ implies $s \succ t$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\succ y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\succ \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \succ & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \succ & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) & > & Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) &> Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} Pol(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, y)) & > & Pol(y) \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}_{Pol}(\mathcal{O}_{Pol}, y) &> y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) &> Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{aligned}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) > f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}_{Pol}(0, y) & > & y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y + 1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$2 \cdot 0 + y + 1 \quad > \quad y$$
$$Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) \quad > \quad Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)))$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\mathcal{O}_{Pol} = 0$$
$$\mathsf{s}_{Pol}(x) = x + 1$$
$$\mathsf{plus}_{Pol}(x, y) = 2x + y + 1$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x),y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x,y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x,y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ Pol(\mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y)) & > & Pol(\mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y))) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ \mathsf{plus}_{Pol}(\mathsf{s}_{Pol}(x), y) & > & \mathsf{s}_{Pol}(\mathsf{plus}_{Pol}(x, y)) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x+1, y) & > & \mathsf{s}_{Pol}(2x+y+1) \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x, y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ 2(x+1)+y+1 & > & (2x+y+1)+1 \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x,y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$
\begin{aligned}
y + 1 &> y \\
2x + y + 3 &> 2x + y + 2
\end{aligned}
$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\
\mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\
\mathsf{plus}_{Pol}(x, y) &= 2x + y + 1
\end{aligned}
$$

Automatic Termination Analysis for TRSs [Lankford, 1975]

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} y+1 & > & y \\ 2x+y+3 & > & 2x+y+2 \end{array}$$

Goal: Find monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

$$\ell \to r \in \mathcal{R} \text{ implies } Pol(\ell) > Pol(r)$$

Pol monotonic, natural polynomial interpretation

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$
- monotonic: if $x > y$, then $f_{Pol}(\ldots, x, \ldots) > f_{Pol}(\ldots, y, \ldots)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{plus}_{Pol}(x,y) & = & 2x+y+1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ proves termination

Non-Determinism and Evaluation Strategies

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

Non-Determinism and Evaluation Strategies

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{plus}(\mathcal{O}, x))$$

Non-Determinism and Evaluation Strategies

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{plus}(\mathcal{O}, x))$$

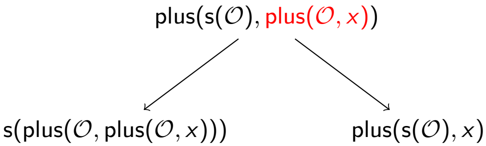
$$\swarrow$$

$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{plus}(\mathcal{O}, x)))$$

Non-Determinism and Evaluation Strategies

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Non-Determinism and Evaluation Strategies

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(\mathcal{O}, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{plus}(\mathcal{O}, x))$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(\mathcal{O}, \mathsf{plus}(\mathcal{O}, x))) \qquad\qquad \mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), x)$$

Innermost evaluation: always use an innermost reducible expression
$\longrightarrow$ used in most programming languages

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{R}_{div}: & \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ & \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$$\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

- There exists no monotonic, natural *Pol* that orders all rules strictly

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

- There exists no monotonic, natural *Pol* that orders all rules strictly
- Dependency pair approach is able to prove termination

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{aligned}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

Dependency Pairs

If $f(\ell_1, \dots, \ell_n) \to r$ is a rule and $g(r_1, \dots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $f^\#(\ell_1, \dots, \ell_n) \to g^\#(r_1, \dots, r_m)$ is a dependency pair

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{div}: \begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{array}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$
\mathcal{R}_{div}: \quad \begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\
\mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sub}_D(x) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) & = & \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) & = & \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) & = & \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{array}$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\
\mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\
\mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\
\mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\
\mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\
\mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\
\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y)
\end{aligned}
$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$\mathcal{R}_{div}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{minus}(x, y) \\ \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

Defined Symbols: minus and div , **Constructor Symbols**: s and $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}_D(x) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{minus}(x, y)) &= \{\mathsf{minus}(x, y)\} \\ \mathrm{Sub}_D(\mathcal{O}) &= \varnothing \\ \mathrm{Sub}_D(\mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))) &= \{\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))\} \end{aligned}$$

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})$:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O}))$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{i}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \quad & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.

A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \ & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}_{div}} \ & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \ & \mathsf{M}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x,y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x,y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x,y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}),\mathsf{s}(\mathcal{O})),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}),\mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathsf{s}(\mathcal{O}),\mathsf{s}(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$$\begin{aligned} \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) &\to x \\ \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{m}(x, y) \\ \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{M}(x, y) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) &\to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-**Chain**:

$$\begin{aligned} & \mathsf{D}(\mathsf{s}^4(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{D}(\mathsf{m}(\mathsf{s}^3(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}_{div}} \; & \mathsf{D}(\mathsf{s}^2(\mathcal{O}), \mathsf{s}^2(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{s}(\mathcal{O})) \\ \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div})} \; & \mathsf{M}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

Theorem: Chain Criterion [Arts & Giesl 2000]

$\mathcal{R}$ is innermost terminating iff there is no infinite $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$-chain

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems

- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems

- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating, then all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating

Processors

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{R}$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{R}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{D}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{R}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

- Many more...

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) &\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) &\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) &\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) &\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) &\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{aligned}$$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))$

$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)$

$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:

- $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))$
- $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)$
- $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{i}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

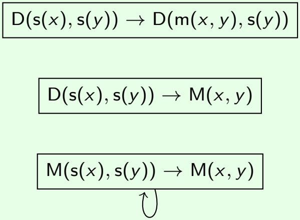
$(1)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(2)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

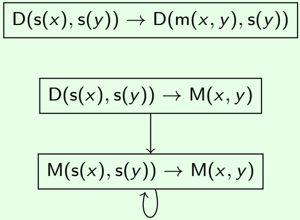
$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

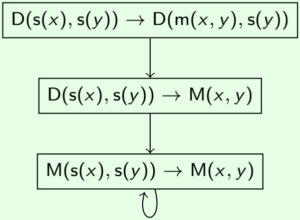
- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll}(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))\end{array}$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x,y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

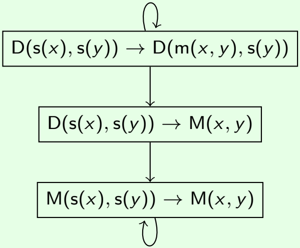
$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x,y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x,y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Dependency Graph Processor (sound & complete)

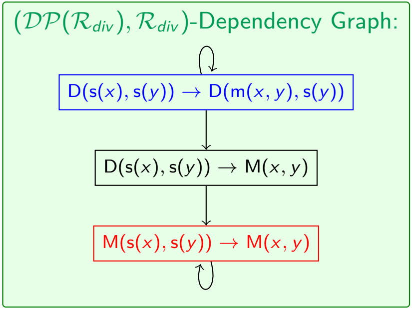
$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\dots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div}) = \{(\{(1)\},\mathcal{R}_{div}),(\{(3)\},\mathcal{R}_{div})\}$$

where $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:



$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{aligned}(a)&\quad \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to x\\ (b)&\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x,y)\\ (c)&\quad \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}\\ (d)&\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)&\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)\\ (2)&\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y)\\ (3)&\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y))\end{aligned}$$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{llcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

Usable Rules Processor (sound)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(2) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
(3) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b)\quad & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c)\quad & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d)\quad & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2)\quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3)\quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{aligned}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$(3) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$(3) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$(3)\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$

$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$

$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules:

$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$(3) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$(3)\ \ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$

$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$

$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules:

$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{aligned}
(a) \quad & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) \quad & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) \quad & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) \quad & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) \quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) \quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{aligned}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$(1)\ \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{rrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$

$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$

$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules:

$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$

$\mathcal{U}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$\begin{array}{rrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$(1)\ \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(3)\}, \{(a), (b)\})\}$$

$$Proc_{UR}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(1)\}, \varnothing)\}$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(1)\}, \mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{aligned}
(a) \quad & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) \quad & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) \quad & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) \quad & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) \quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) \quad & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{aligned}
$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol*

weakly-monotonic

- weakly-monotonic: if $x \geq y$, then $f_{Pol}(\dots, x, \dots) \geq f_{Pol}(\dots, y, \dots)$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\
(3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))
\end{array}
$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

$(1)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(2)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(1)\}, \varnothing)$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(1)\}, \varnothing)$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(1) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y)$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$$

$(\{(1)\}, \varnothing):$

$$\begin{aligned} \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{M}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(1) $Pol(\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) > Pol(\mathsf{M}(x, y))$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(1)\}, \varnothing)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{M}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(1) $x + 1 > x$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(1)\}, \varnothing)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{M}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$$

$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation Pol such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$

$(3)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a) \quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x$
$(b) \quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y)$

$(3) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))$

$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$

$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$

$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$

$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) &= x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & Pol(\mathsf{m}(x, \mathcal{O})) & \geq & Pol(x) \\ (b) & Pol(\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) & \geq & Pol(\mathsf{m}(x, y)) \end{array}$$

$$(3)\ Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) > Pol(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$$

$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & x & \geq & x \\ (b) & x+1 & \geq & x \end{array}$$

$$(3) \qquad x+1 > x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing)$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$$

$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x,y) & = & x \end{array}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to x \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{m}(x, y) \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (2) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \\ (3) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

$$Proc_{RP}(\{(1)\}, \varnothing) = \{(\varnothing, \varnothing)\}$$

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \{(a), (b)\}) = \{(\varnothing, \{(a), (b)\})\}$$

$(\{(1)\}, \varnothing)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{M}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

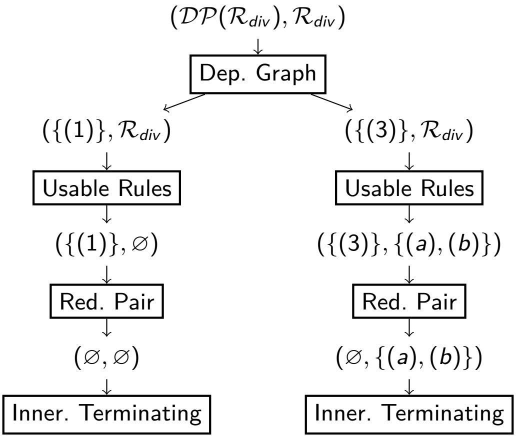
$(\{(3)\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

Find weakly-monotonic, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Final Innermost Termination Proof



$\Rightarrow$ **Innermost termination is proved automatically!**

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathrm{g}(\mathcal{O}) \quad \to \quad \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathcal{O}))\,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathrm{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ ^1/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination for PTRSs [Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ {}^1\!/\!_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_8 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ {}^1\!/\!_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ {}^1\!/\!_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$
$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination for PTRSs [Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, . . .]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$ 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$ 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$ $1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$ 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$ $1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$ $1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution:	$\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$	$\lvert\mu\rvert$
	$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$	0
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$	$5/8$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, . . .]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} \lvert\mu_n\rvert = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$ 0

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$ $^1/_2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ ^1/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$ $^1/_2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$ $\{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathcal{O},\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ ^1/_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$ $^5/_8$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 2005, Avanzini & Dal Lago & Yamada 2019, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ Yes

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \qquad \mathsf{g}(x) \;\to\; \{\, \tfrac{1}{2} : x,\; \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad \mathsf{g}(x) \to \{\, \tfrac{1}{2} : x,\ \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad \mathsf{g}(x) \to \{ \tfrac{1}{2} : x, \ \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathsf{g}_{Pol}(x) = 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad g(x) \to \{ \tfrac{1}{2} : x, \ \tfrac{1}{2} : g(g(x)) \}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) = 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \to \quad \{\, \tfrac{1}{2} : x, \; \tfrac{1}{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(x)) \,\}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathsf{g}_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad \{ \tfrac{1}{2} : x, \ \tfrac{1}{2} : \mathrm{g}(\mathrm{g}(x)) \}$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$\mathrm{g}_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \quad \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (2 + x)$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \; 1 + x$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

Termination of Probabilistic TRSs

$$\mathcal{R}_{rw}: \quad 1 + x \quad \geq \; 1 + x$$

Theorem (AST with Polynomial Interpretation)

Let *Pol* be a multilinear monotonic polynomial interpretation.

For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\} \in \mathcal{R}$ let

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Then $\mathcal{R}$ is AST.

Pol* is *multilinear

monomials like $x \cdot y$, but no monomials like x^2

$$g_{Pol}(x) \quad = \quad 1 + x$$

$\Rightarrow$ proves AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A) : \quad \{\, \ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k \,\}$$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A) : \quad \{\, \ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k \,\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\bot$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A) : \quad \{\, \ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \leq i \leq k\,\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\perp$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \perp\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \perp\}$	not AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \dots, p_j : t_j^\#, \dots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \le i \le k\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\bot$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Pairs for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$

Options for Dependency Pairs (A)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, then a dependency pair is :

$$(A): \quad \{\,\ell^\# \to \{p_1 : t_1^\#, \ldots, p_j : t_j^\#, \ldots, p_k : t_k^\#\} \mid t_j \in \mathrm{Sub}_D(r_j), 1 \le i \le k\,\}$$

If $\mathrm{Sub}_D(r_i) = \varnothing$, then we insert a constructor $\bot$ into $\mathrm{Sub}_D(r_i)$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g}$	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2)$	$: \mathsf{G}$	$\to \{1/2 : \mathsf{G}, 1/2 : \bot\}$	AST ↯

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t \text{ is a subterm of } r \text{ with defined root}\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}),\ \dots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k})\}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^{\#} \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	$: \mathsf{g} \to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), \ \dots \ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	: g	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	: G	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G},\mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$	AST
$\mathcal{R}_2$	: g	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$	not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$\mathcal{R}_1$	: g	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$		AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)$	: G	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G}, \mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$		AST
$\mathcal{R}_2$	: g	$\to \{1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}), 1/2 : \bot\}$		not AST
$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2)$	: G	$\to \{1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{G}, \mathsf{G}, \mathsf{G}), 1/2 : \bot\}$		not AST

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}),\ \dots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 : \qquad \mathsf{f}(\mathcal{O}) &\to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ \mathsf{a} &\to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \end{aligned}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), \; \ldots \; , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (B)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{j,1}, \ldots, t_{j,i_j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then the dependency pair is:

$$(B): \quad \ell^\# \to \{p_1 : \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}),\ \ldots\ , p_k : \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k})\}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3 : & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lrl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
& \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

$$\{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lrl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
 & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\stackrel{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}
\end{array}
$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

$$\{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lrl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
 & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\}
\end{array}
$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{lrl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
 & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\
\overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B}),
\end{array}
$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ & \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\ \overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\ \overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\ \overset{i}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B}), \\ & \quad 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{C}), 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\} \end{array}$$

Dependency Tuples for AST: Failed Attempt

$$
\begin{array}{rrl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \mathsf{F}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
& \mathsf{A} & \to \{1/2 : \mathsf{B}, 1/2 : \mathsf{C}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
& \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
& \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{C})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), \color{red}{1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{B})}, \\
& \quad \color{red}{1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{C})}, 1/4 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\}
\end{array}
$$

- The red terms do not correspond to a term in the original rewrite sequence
- One cannot simulate original rewrite sequences by chains

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \ell^{\#} \quad \to \{p_1 : \ \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}) \quad , \ \ldots \ , p_k : \ \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}) \quad \}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \; \ldots \; , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 : \qquad & \mathsf{f}(\mathcal{O}) && \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} && \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \end{aligned}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \ldots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) \coloneqq \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root$\}$ - as multiset

Options for Dependency Tuples (C)

If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is a rule, and $\mathrm{Sub}_D(r_j) = \{t_{1,j}, \dots, t_{i_j,j}\}$ for all $1 \leq j \leq k$, then a dependency pair is:

$$(C): \quad \langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \dots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \dots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \dots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\ & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\} \end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}
$$

$$\{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
& \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
& \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}
\end{array}
$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\ & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \{ \ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{ \ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{ \ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{lll} \mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\ & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\ \mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\ & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\ \overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\} \end{array}$$

$$\{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a})\rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a}\rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b}\rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c}\rangle\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\}
\end{array}$$

Coupled Dependency Tuples: Sound

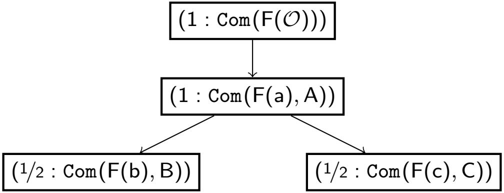
$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_3: & \mathsf{f}(\mathcal{O}) & \to \{1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\}, \\
 & \mathsf{a} & \to \{1/2 : \mathsf{b}, 1/2 : \mathsf{c}\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle \mathsf{F}(\mathcal{O}), \mathsf{f}(\mathcal{O}) \rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A}), \mathsf{f}(\mathsf{a}) \rangle\} \\
 & \langle \mathsf{A}, \mathsf{a} \rangle & \to \{1/2 : \langle \mathsf{B}, \mathsf{b} \rangle, 1/2 : \langle \mathsf{C}, \mathsf{c} \rangle\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1 : \mathsf{f}(\mathsf{a})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{R}_3} & \{\ 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{b}), 1/2 : \mathsf{f}(\mathsf{c})\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \{\ 1 : \mathsf{F}(\mathcal{O})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{a}), \mathsf{A})\} \\
\overset{\mathsf{i}}{\rightrightarrows}_{\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3)} & \{\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{b}), \mathsf{B}), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{F}(\mathsf{c}), \mathsf{C})\}
\end{array}
$$

Probabilistic Chain

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{R}_3 : & f(\mathcal{O}) & \to \{1 : f(a)\}, \\
 & a & \to \{1/2 : b, 1/2 : c\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3) : & \langle F(\mathcal{O}), f(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(F(a), A), f(a)\rangle\} \\
 & \langle A, a\rangle & \to \{1/2 : \langle B, b\rangle, 1/2 : \langle C, c\rangle\}
\end{array}
$$

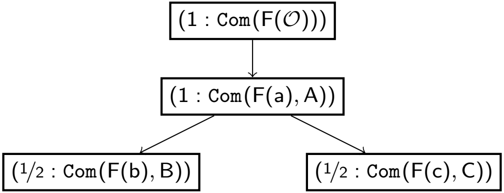


Chain: On every path, we use a dependency pair after a finite number of steps.

$$(\xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}})$$

Probabilistic Chain

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{R}_3: & f(\mathcal{O}) & \to \{1 : f(a)\}, \\
 & a & \to \{1/2 : b, 1/2 : c\} \\
\mathcal{DT}(\mathcal{R}_3): & \langle F(\mathcal{O}), f(\mathcal{O})\rangle & \to \{1 : \langle \mathtt{Com}(F(a), A), f(a)\rangle\} \\
 & \langle A, a\rangle & \to \{1/2 : \langle B, b\rangle, 1/2 : \langle C, c\rangle\}
\end{array}
$$



Chain: On every path, we use a dependency pair after a finite number of steps.

$$(\xrightarrow{i}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{i}{}^{*}_{\mathcal{R}})$$

Theorem: Chain Criterion

$\mathcal{R}$ is innermost terminating if there is no infinite $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$-chain

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathcal{DT}(1) = \quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathcal{DT}(1) = \quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\}$$

$$\mathcal{DT}(2) = \quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ \quad 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathcal{DT}(1) = \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com}\}$$

$$\mathcal{DT}(2) = \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$$

$$\mathcal{DT}(3) = \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com}\}$$

Dependency Tuples for $\mathcal{R}_{div}$

$\mathcal{R}_{div}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(2) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(4) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\mathcal{DT}(1) = & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\} \\
\mathcal{DT}(2) = & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ \quad 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
\mathcal{DT}(3) = & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ \quad 1 : \mathtt{Com}\} \\
\mathcal{DT}(4) = & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ \quad 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
    - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency rules: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency rules: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $Proc(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency rules: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST, then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - DP Problems $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ with $\mathcal{P}$ a set of DTs and $\mathcal{S}$ a PTRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency rules: $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST, then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST, then all $(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i)$ are innermost AST

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \dots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

- Processors that reduce the number of terms in rhs of $\mathcal{P}$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
    - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

    - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:
    - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

- Processors that reduce the number of terms in rhs of $\mathcal{P}$:
    - Usable Terms Processor (new)

$$Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}$$

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1,\mathcal{S}),\dots,(\mathcal{P}_k,\mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ},\mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P},\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S}))\}$$

- Processors that reduce the number of terms in rhs of $\mathcal{P}$:
  - Usable Terms Processor (new)

$$Proc_{UT}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P},\mathcal{S}),\mathcal{S})\}$$

- Processors that completely transforms $(\mathcal{P},\mathcal{S})$:

Processors

- Processors that reduce $\mathcal{P}$:
  - Dependency Graph Processor

$$Proc_{DG}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1,\mathcal{S}),\ldots,(\mathcal{P}_k,\mathcal{S})\}$$

  - Reduction Pair Processor

$$Proc_{RP}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_{\succ},\mathcal{S})\}$$

- Processors that reduce $\mathcal{S}$:
  - Usable Rules Processor

$$Proc_{UR}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P},\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S}))\}$$

- Processors that reduce the number of terms in rhs of $\mathcal{P}$:
  - Usable Terms Processor (new)

$$Proc_{UT}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P},\mathcal{S}),\mathcal{S})\}$$

- Processors that completely transforms $(\mathcal{P},\mathcal{S})$:
  - Probability Removal Processor (new)

$$Proc_{PR}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{D},\mathcal{R})\}$$

Probability Removal Processor (sound & complete)

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^{\#} \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^{\#}, \ldots, t_n^{\#})\}$

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \qquad \in \mathcal{S}$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \in \mathcal{P}$$

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)))\} \in \mathcal{S}$$
$$\rightsquigarrow \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y))) \in \mathrm{np}(\mathcal{S})$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x,y))\} \in \mathcal{P}$$

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST
$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

$$\begin{array}{ll} \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)))\} & \in \mathcal{S} \\ \rightsquigarrow \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y))) & \in \mathrm{np}(\mathcal{S}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x,y))\} & \in \mathcal{P} \\ \rightsquigarrow \begin{cases} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \end{cases} & \in \mathrm{np}(\mathcal{P}) \end{array}$$

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST
$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)))\} \quad \in \mathcal{S}$$
$$\rightsquigarrow \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y))) \quad \in \mathrm{np}(\mathcal{S})$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x,y))\} \in \mathcal{P}$$
$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \end{cases} \quad \in \mathrm{np}(\mathcal{P})$$

Use the already existing framework

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^{\#} \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^{\#}, \ldots, t_n^{\#})\}$

then $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is innermost AST

$\Leftrightarrow$ $(\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S}))$ is innermost terminating

$$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)))\} \in \mathcal{S}$$

$$\rightsquigarrow \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y))) \in \mathrm{np}(\mathcal{S})$$

$$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x,y))\} \in \mathcal{P}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x,y) \end{cases} \in \mathrm{np}(\mathcal{P})$$

Use the already existing framework

- (currently) more processors

Probability Removal Processor (sound & complete)

If

- all rules in $\mathcal{S}$ have the form $\ell \to \{1 : r\}$
- all rules in $\mathcal{P}$ have the form $\ell^\# \to \{1 : \mathtt{Com}(t_1^\#, \ldots, t_n^\#)\}$

then

$$\begin{array}{rl} & (\mathcal{P}, \mathcal{S}) \text{ is innermost AST} \\ \Leftrightarrow & (\mathrm{np}(\mathcal{P}), \mathrm{np}(\mathcal{S})) \text{ is innermost terminating} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : s(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} & \in \mathcal{S} \\ \rightsquigarrow \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y))) & \in \mathrm{np}(\mathcal{S}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} & \in \mathcal{P} \\ \rightsquigarrow \begin{cases} \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)) \\ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{M}(x, y) \end{cases} & \in \mathrm{np}(\mathcal{P}) \end{array}$$

Use the already existing framework

- (currently) more processors
- specialized for non-probabilistic TRS

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x,y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x,\mathcal{O}) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathsf{M}(x,y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
$(4)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)),\mathsf{M}(x,y))\}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

Dependency Graph Processor (sound & complete)

(a)	$\mathsf{m}(x, \mathcal{O})$	$\to$	$\{1 : x\}$
(b)	$\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c)	$\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{1 : \mathcal{O}\}$
(d)	$\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1)	$\mathsf{M}(x, \mathcal{O})$	$\to$	$\{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2)	$\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3)	$\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4)	$\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))$	$\to$	$\{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

Dependency Graph Processor (sound & complete)

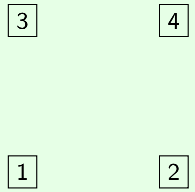
$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

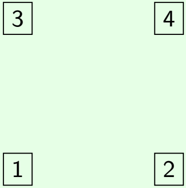
(a) $\mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),$
$1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

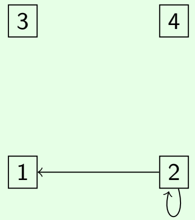
- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \in A_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

(a) $\mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \in A_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

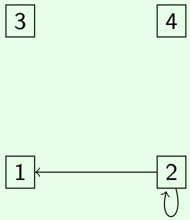
(a) $\mathsf{m}(x,\mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x,y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x,\mathcal{O}) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathsf{M}(x,y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),$
$1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)),\mathsf{M}(x,y))\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1,\mathcal{S}),\ldots,(\mathcal{P}_k,\mathcal{S})\}$

where $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P},\mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}),\mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P},\mathcal{S})$-Dependency Graph

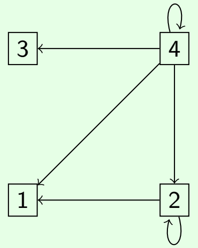
- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : A_1,\ldots,p_k : A_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \in A_j$ for some j and substitutions σ_1,σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}^*_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Dependency Graph Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : \mathtt{Com}\}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}\}$
$(4)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}), \ldots, (\mathcal{P}_k, \mathcal{S})\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-dependency graph

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \in A_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

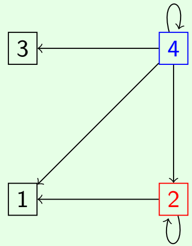
Dependency Graph Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\,\} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\,\} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& Proc_{DG}(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div}) \\
= & \{(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div}), (\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})\}
\end{array}
$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{div}), \mathcal{R}_{div})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency tuples from $\mathcal{P}$
- there is an arc from $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \in A_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \phantom{\{} 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4) & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
\end{array}
$$

$$
Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}
$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : \mathtt{Com}\}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathtt{Com}\}$
$(4)\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$$Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \dots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \dots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

(a) $\mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
(b) $\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
(c) $\mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
(d) $\mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

(1) $\mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(2) $\mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
(3) $\mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
(4) $\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$

$$Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}$$

$$Proc_{UT}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \ldots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
(4) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
$$

$$
Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}
$$

$$
Proc_{UT}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})
$$

with

$$
(4) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad \to \quad \{ \quad \begin{array}{l} 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\} \end{array}
$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \ldots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$
t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2
$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$(4) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$$

$$Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}$$

$$Proc_{UT}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})$$

with

$$(4) \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ \; {}^1/_2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \; {}^1/_2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \dots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \ldots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
(4)\ \ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}
$$

$$
Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}
$$

$$
Proc_{UT}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div})
$$

with

$$
(4') \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad \to \quad \{ \quad 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \ldots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$
t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2
$$

Usable Terms Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$(4)\ \ \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)), \mathsf{M}(x, y))\}$$

$$Proc_{UT}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{T}_{\mathbf{UT}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}), \mathcal{S})\}$$

$$Proc_{UT}(\{(4)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div})\}$$

with

$$(4') \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad \to \quad \{ \quad {}^{1}/_{2} : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \quad {}^{1}/_{2} : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$$

- dependency graph on the level of the compound symbols inside the rules
- for $s \to \{p_1 : A_1, \ldots, p_k : A_k\} \in \mathcal{P}$ a term $t \in A_j$ for some j is usable iff there exists $v \to \ldots \in \mathcal{P}$ and substitutions σ_1, σ_2 such that

$$t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{S})} v\sigma_2$$

Usable Rules Processor (Sound)

$$\begin{array}{llcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}$$

Usable Rules Processor (Sound)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

Usable Rules Processor (Sound)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
$(4')\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$

$Proc_{UR}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div})$

$Proc_{UR}(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules:

$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div})$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & \qquad 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$$\begin{array}{rrcl}(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) & \to & \{1:x\}\\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1:\mathsf{m}(x,y)\}\\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{1:\mathcal{O}\}\\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2:\mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2:\mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}(1) & \mathsf{M}(x,\mathcal{O}) & \to & \{\ 1:\mathtt{Com}\ \}\\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1:\mathsf{M}(x,y)\}\\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1:\mathtt{Com}\ \}\\ (4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2:\mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\\ & & & \ \ 1/2:\mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}\end{array}$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P},\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(2)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(4')\},\mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\},\mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

$$\mathcal{U}(\{(4')\},\mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\ (b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x,y)\} \\ (c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\ (d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathsf{M}(x,\mathcal{O}) & \to & \{1 : \mathtt{Com}\} \\ (2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{M}(x,y)\} \\ (3) & \mathsf{D}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathtt{Com}\} \\ (4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)), \\ & & & \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\} \end{array}$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P},\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(2)\},\mathcal{R}_{div})$$

$$Proc_{UR}(\{(4')\},\mathcal{R}_{div})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\},\mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

$$\mathcal{U}(\{(4')\},\mathcal{R}_{div}) = \{(a),(b)\}$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P},\mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Usable Rules Processor (Sound)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \phantom{\{} 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{UR}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S}))\}$$

$$Proc_{UR}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(2)\}, \varnothing)\}$$

$$Proc_{UR}(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(\{(4')\}, \{(a), (b)\})\}$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{div}) = \varnothing$$

$$\mathcal{U}(\{(4')\}, \mathcal{R}_{div}) = \{(a), (b)\}$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{P}, \mathcal{S})$

- All rules of $\mathcal{S}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{P}$, regardless of the probabilities

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{llcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b)\quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$
$(c)\quad \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathcal{O}\}$
$(d)\quad \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$(1)\quad \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
$(2)\quad \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\}$
$(3)\quad \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \{ 1 : \mathtt{Com} \}$
$(4')\quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x,\mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x,y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(x,\mathcal{O}) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathsf{M}(x,y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1 : \mathtt{Com}\ \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)), \\
 & & & \ \ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x,y),\mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P},\mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ},\mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:

$$Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(r_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$\mathit{Proc}_{\mathit{RP}}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:
$$\mathit{Pol}(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \mathit{Pol}(r_j)$$
- For all $(\ell^{\#}, \ell) \to \mu = \{p_1 : (A_1, r_1), \dots, p_k : (A_k, r_k)\}$ in $\mathcal{P}$:
$$\mathit{Pol}(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \mathit{Pol}(A_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) & \to & \{1 : x\} \\
(b) & \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathsf{m}(x, y)\} \\
(c) & \mathsf{d}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{1 : \mathcal{O}\} \\
(d) & \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{1/2 : \mathsf{d}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), 1/2 : \mathsf{s}(\mathsf{d}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \mathsf{M}(x, \mathcal{O}) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(2) & \mathsf{M}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathsf{M}(x, y)\} \\
(3) & \mathsf{D}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1 : \mathtt{Com} \} \\
(4') & \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \\
 & & & \;\; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}
\end{array}
$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, \mathcal{S})\}$$

Find weakly-monotonic, multilinear, natural polynomial interpretation Pol such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{S}$:
$$Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(r_j)$$
- For all $(\ell^{\#}, \ell) \to \mu = \{p_1 : (A_1, r_1), \dots, p_k : (A_k, r_k)\}$ in $\mathcal{P}$:
$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot Pol(A_j)$$
- For all $(\ell^{\#}, \ell) \to \{p_1 : (A_1, r_1), \dots, p_k : (A_k, r_k)\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with
$$Pol(\ell^{\#}) > Pol(A_j)$$
If $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ is in $\mathcal{S}$, then we additionally require
$$Pol(\ell) \geq Pol(r_j)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$(a) \quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$$
$$(b) \quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$$

$$(4') \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)), \; 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$$

$$(\{(4')\}, \{(a), (b)\}) :$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a) \quad \mathsf{m}(x, \mathcal{O}) \to \{1 : x\}$
$(b) \quad \mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{1 : \mathsf{m}(x, y)\}$

$$(4') \quad \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \{\ 1/2 : \mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)),\ 1/2 : \mathtt{Com}(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))\}$$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) &= x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a) \quad Pol(\mathsf{m}(x, \mathcal{O})) \geq 1/2 \cdot Pol(\mathsf{m}(x, \mathcal{O})) + 1/2 \cdot Pol(x)$

$(b) \quad Pol(\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) \geq 1/2 \cdot Pol(\mathsf{m}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) + 1/2 \cdot Pol(\mathsf{m}(x, y))$

$$(4') \quad Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) \geq 1/2 \cdot Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) + 1/2 \cdot Pol(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) &= x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) &= x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{llcl} (a) & x & \geq & 1/2 \cdot x + 1/2 \cdot x \\ (b) & x + 1 & \geq & 1/2 \cdot (x + 1) + 1/2 \cdot x \end{array}$$

$$(4') \qquad x + 1 \geq 1/2 \cdot (x + 1) + 1/2 \cdot x$$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\}) :$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{lrcl} (a) & x & \geq & x \\ (b) & x+1 & \geq & x+1/2 \end{array}$$

$$(4') \qquad x+1 \;\geq\; x+1/2$$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x+1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x,y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x,y) & = & x \end{array}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$\begin{array}{ll} (a) & x \geq x \\ (b) & x + 1 \geq x + 1/2 \end{array}$$

$$(4') \qquad x + 1 \geq x + 1/2$$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

and

$$Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) = x + 1 > x = Pol(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a) \quad x \geq x$
$(b) \quad x + 1 \geq x + 1/2$

$(4') \quad x + 1 \geq x + 1/2$

$(\{(4')\}, \{(a), (b)\}):$

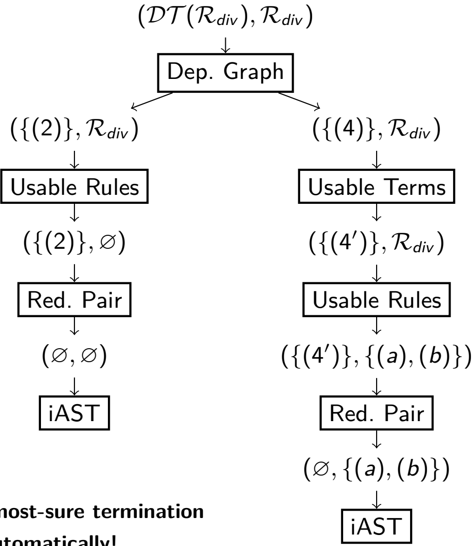
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{s}_{Pol}(x) & = & x + 1 \\ \mathsf{m}_{Pol}(x, y) & = & x \\ \mathsf{D}_{Pol}(x, y) & = & x \end{array}$$

and

$$Pol(\mathsf{D}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y))) = x + 1 > x = Pol(\mathsf{D}(\mathsf{m}(x, y), \mathsf{s}(y)))$$

$$Proc_{RP}(\{(4')\}, \{(a), (b)\}) = \{(\varnothing, \{(a), (b)\})\}$$

Final Innermost Almost-Sure Termination Proof



$\Rightarrow$ **Innermost almost-sure termination is proved automatically!**

Implementation and Experiments

- Fully implemented in AProVE
- Evaluated on 67 benchmarks (61 iAST / 59 AST)

	AProVE	DPs	Direct Polo	NaTT2
iAST	53	51	27	22
AST	27	-	27	22

Probabilistic Quicksort:

$$\begin{aligned}
\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1/2 : \mathsf{cons}(x, xs), 1/2 : \mathsf{rotate}(\mathsf{app}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})))\}\\
\mathsf{qs}(\mathsf{nil}) &\to \{1 : \mathsf{nil}\}\\
\mathsf{qs}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{qsHelp}(\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)))\}\\
\mathsf{qsHelp}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{app}(\mathsf{qs}(\mathsf{low}(x, xs)), \mathsf{cons}(x, \mathsf{qs}(\mathsf{high}(x, xs))))\}\\
&\dots
\end{aligned}$$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^\#, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{1,1}, \ldots, t^\#_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^\#_{k,1}, \ldots, t^\#_{k,i_k}), r_k \rangle \}$$

- Adapted the main processors and added more:
  - Dependency Graph Processor
  - Reduction Pair Processor
  - Probability Removal Processor
  - Usable Terms Processor
  - Usable Rules Processor

Conclusion

1. Direct application of polynomials for AST of probabilistic TRSs

- $Pol(\ell) > Pol(r_j)$ for some $1 \leq j \leq k$
- $Pol(\ell) \geq \mathbb{E}(\mu) = p_1 \cdot Pol(r_1) + \ldots + p_k \cdot Pol(r_k)$

2. DP framework for innermost AST of probabilistic TRSs

- New Dependency Tuples and Chains:

$$\langle \ell^{\#}, \ell \rangle \to \{p_1 : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{1,1}, \ldots, t^{\#}_{1,i_1}), r_1 \rangle, \ \ldots \ , p_k : \langle \mathtt{Com}(t^{\#}_{k,1}, \ldots, t^{\#}_{k,i_k}), r_k \rangle\}$$

- Adapted the main processors and added more:
  - Dependency Graph Processor
  - Reduction Pair Processor
  - Probability Removal Processor
  - Usable Terms Processor
  - Usable Rules Processor

- Fully implemented in AProVE.