A Dependency Pair Framework for Relative Termination of Term Rewriting

Jan-Christoph Kassing, Grigory Vartanyan, and Jürgen Giesl
RWTH Aachen

June 2024

Termination of TRSs

$$\mathcal{R}_{len}: \quad \begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$ $\mathsf{len}([0, 0, 0])$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) && \mathsf{len}([0, 0, 0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} \; & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) && 1 + \mathsf{len}([0, 0]) \end{aligned}$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0,0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 2 + \mathsf{len}([0]) \end{array}$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0,0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 2 + \mathsf{len}([0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil})))) & 3 + \mathsf{len}([\,]) \end{array}$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

	$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil}))))$	$\mathsf{len}([0,0,0])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil}))))$	$1+\mathsf{len}([0,0])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil}))))$	$2+\mathsf{len}([0])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}))))$	$3+\mathsf{len}([\,])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))$	3

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x,y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0,0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil})))) & 1+\mathsf{len}([0,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O},\mathsf{nil})))) & 2+\mathsf{len}([0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil})))) & 3+\mathsf{len}([\,]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O}))) & 3 \end{array}$$

Termination

$\mathcal{R}$ is terminating iff there is no infinite evaluation $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:
$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:
$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$ $\quad$ $\mathsf{len}([0, 1, 0])$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0, 1, 0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([1, 0]) \end{array}$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0, 1, 0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([1, 0]) \\ \to_{\mathcal{B}_{com}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([0, 1]) \end{array}$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0, 1, 0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([1, 0]) \\ \to_{\mathcal{B}_{com}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([0, 1]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil})))) & 2 + \mathsf{len}([1]) \end{array}$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{array}$$

$\mathcal{B}_{com}$:
$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & \mathsf{len}([0,1,0]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([1,0]) \\ \to_{\mathcal{B}_{com}} & \mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil})))) & 1 + \mathsf{len}([0,1]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil})))) & 2 + \mathsf{len}([1]) \\ \to_{\mathcal{R}_{len}} & \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil})))) & 3 + \mathsf{len}([\,]) \end{array}$$

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

	$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$	$\mathsf{len}([0, 1, 0])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$	$1 + \mathsf{len}([1, 0])$
$\to_{\mathcal{B}_{com}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil}))))$	$1 + \mathsf{len}([0, 1])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil}))))$	$2 + \mathsf{len}([1])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}))))$	$3 + \mathsf{len}([\,])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))$	3

Relative Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, y)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(y)) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$[a, b] = [b, a]$$

	$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$	$\mathsf{len}([0, 1, 0])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{nil}))))$	$1 + \mathsf{len}([1, 0])$
$\to_{\mathcal{B}_{com}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathcal{O}, \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil}))))$	$1 + \mathsf{len}([0, 1])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathcal{O}), \mathsf{nil}))))$	$2 + \mathsf{len}([1])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{len}(\mathsf{nil}))))$	$3 + \mathsf{len}([\,])$
$\to_{\mathcal{R}_{len}}$	$\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathcal{O})))$	3

Relative Termination

$\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* t_1 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* \ldots$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{len}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{array}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$$\mathcal{R}_{len}: \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{array}$$

Defined Symbols: len

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: $\mathsf{cons}, \mathsf{nil}, \mathsf{s}, \mathcal{O}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: cons, nil, s, $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{aligned}$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: $\mathsf{cons}, \mathsf{nil}, \mathsf{s}, \mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))\big) = \big\{\mathsf{len}(xs)\big\}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{array}$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: cons, nil, s, $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))\big) = \big\{\mathsf{len}(xs)\big\}$$

Dependency Pairs

If $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $g(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $f^\#(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to g^\#(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) & \to & \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{array}$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: cons, nil, s, $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))\big) \quad = \quad \big\{\mathsf{len}(xs)\big\}$$

Dependency Pairs

If $f(\ell_1, \dots, \ell_n) \to r$ is a rule and $g(r_1, \dots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $f^\#(\ell_1, \dots, \ell_n) \to g^\#(r_1, \dots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{len})$:

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &\to \mathcal{O} \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs)) \end{aligned}$$

Defined Symbols: len , **Constructor Symbols**: cons, nil, s, $\mathcal{O}$

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))\big) = \big\{\mathsf{len}(xs)\big\}$$

Dependency Pairs

If $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $g(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $f^{\#}(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to g^{\#}(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{len})$: $\quad \mathsf{len}^{\#}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{len}^{\#}(xs)$

Dependency Pairs Cont.

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

$$\mathsf{len}^{\#}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{len}^{\#}(xs)$$

Termination of $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^{*} t_1 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^{*} \ldots$$

Dependency Pairs Cont.

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

$$\mathsf{len}^\#(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{len}^\#(xs)$$

Termination of $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^* t_1 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^* \dots$$

Reminder: Relative Termination of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$

$\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* t_1 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* \dots$$

Dependency Pairs Cont.

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

$$\mathsf{len}^{\#}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{len}^{\#}(xs)$$

Termination of $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^* t_1 \to_{\mathcal{D}} \circ \to_{\mathcal{R}}^* \ldots$$

Reminder: Relative Termination of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$

$\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_0 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* t_1 \to_{\mathcal{R}} \circ \to_{\mathcal{B}}^* \ldots$$

Theorem: Chain Criterion [Arts & Giesl 2000]

$\mathcal{R}$ is terminating iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R}$ is terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
    - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
    - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
    - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $Proc(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is terminating, then all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are terminating

Timeline

- 2000: DP Framework for termination [Arts & Giesl 2000, . . .]
- 2006: Problem #106 of the RTA list of open problems:

  "Can we use the dependency pair method to prove relative termination?"
- 2016: Properties of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ that allow to analyze the DP problem $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \cup \mathcal{B})$ [Iborra & Nishida & Vidal & Yamada 2016]
- 2023: Annotated Dependency Pairs for Probabilistic Rewriting [Kassing & Giesl 2023, Kassing & Dollase & Giesl 2024]
- 2024: Annotated Dependency Pairs for Relative Termination

Timeline

- 2000: DP Framework for termination [Arts & Giesl 2000, . . .]
- 2006: Problem #106 of the RTA list of open problems:

  "*Can we use the dependency pair method to prove relative termination?*"
- 2016: Properties of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ that allow to analyze the DP problem $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \cup \mathcal{B})$ [Iborra & Nishida & Vidal & Yamada 2016]
- 2023: Annotated Dependency Pairs for Probabilistic Rewriting [Kassing & Giesl 2023, Kassing & Dollase & Giesl 2024]
- 2024: Annotated Dependency Pairs for Relative Termination

Timeline

- 2000: DP Framework for termination [Arts & Giesl 2000, . . .]
- 2006: Problem #106 of the RTA list of open problems:

  "*Can we use the dependency pair method to prove relative termination?*"
- 2016: Properties of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ that allow to analyze the DP problem $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \cup \mathcal{B})$ [Iborra & Nishida & Vidal & Yamada 2016]
- 2023: Annotated Dependency Pairs for Probabilistic Rewriting [Kassing & Giesl 2023, Kassing & Dollase & Giesl 2024]
- 2024: Annotated Dependency Pairs for Relative Termination

Timeline

- 2000: DP Framework for termination [Arts & Giesl 2000, ...]
- 2006: Problem #106 of the RTA list of open problems:

  "Can we use the dependency pair method to prove relative termination?"
- 2016: Properties of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ that allow to analyze the DP problem $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \cup \mathcal{B})$ [Iborra & Nishida & Vidal & Yamada 2016]
- 2023: Annotated Dependency Pairs for Probabilistic Rewriting [Kassing & Giesl 2023, Kassing & Dollase & Giesl 2024]
- 2024: Annotated Dependency Pairs for Relative Termination

Timeline

- 2000: DP Framework for termination [Arts & Giesl 2000, . . .]
- 2006: Problem #106 of the RTA list of open problems:

  "*Can we use the dependency pair method to prove relative termination?*"
- 2016: Properties of $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ that allow to analyze the DP problem $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \cup \mathcal{B})$ [Iborra & Nishida & Vidal & Yamada 2016]
- 2023: Annotated Dependency Pairs for Probabilistic Rewriting [Kassing & Giesl 2023, Kassing & Dollase & Giesl 2024]
- 2024: Annotated Dependency Pairs for Relative Termination

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$:	$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$	$\mathcal{B}_1$:	$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$:	$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$	$\mathcal{B}_1$:	$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$:	$\mathsf{a} \to \mathsf{b}$	$\mathcal{B}_1$:	$\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1/\mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing)$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1/\mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1)/\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_2 / \mathcal{B}_2$ not terminating

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_2 / \mathcal{B}_2$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2) / \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{B}_2$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2) = \varnothing$)

Dependency Pairs for Relative Termination

Goal: DP approach better than $\mathcal{DP}(\mathcal{R} \cup \mathcal{B}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ (Termination of $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$)

Sufficient to analyze $\mathcal{DP}(\mathcal{R}) / \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$?

$\mathcal{R}_1$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_1$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{R}_1 / \mathcal{B}_1$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) / \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{B}_1$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_1) = \varnothing$)

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_2 / \mathcal{B}_2$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2) / \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{B}_2$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_2) = \varnothing$)

Domination

$\mathcal{R}$ dominates $\mathcal{B}$ $:\Leftrightarrow$ no defined symbol of $\mathcal{R}$ in a right-hand side of $\mathcal{B}$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\quad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\quad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Duplication

$\mathcal{B}$ is duplicating $:\Leftrightarrow \exists \ell \to r \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{V}$: x occurs more often in r than in ℓ.

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Duplication

$\mathcal{B}$ is duplicating $:\Leftrightarrow \exists \ell \to r \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{V}$: x occurs more often in r than in ℓ.

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Duplication

$\mathcal{B}$ is duplicating $:\Leftrightarrow \exists \ell \to r \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{V}$: x occurs more often in r than in ℓ.

DPs for Relative Termination [Iborra et al. 2016]

If $\mathcal{R}$ dominates $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}$ is non-duplicating, then $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ is terminating

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Duplication

$\mathcal{B}$ is duplicating $:\Leftrightarrow \exists \ell \to r \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{V}$: x occurs more often in r than in ℓ.

DPs for Relative Termination [Iborra et al. 2016]

If $\mathcal{R}$ dominates $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}$ is non-duplicating, then $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ is terminating

$\mathcal{R}_{len}$:

$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$

$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$

$\mathcal{B}_{com}$:

$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$

Dependency Pairs for Relative Termination

$\mathcal{R}_3$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_3$: $\mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}(x, \mathsf{f}(x))$

$$\underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})} \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a})) \to_{\mathcal{R}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}(\mathsf{a})}) \to_{\mathcal{B}_3} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}(\mathsf{a}))) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{R}_3/\mathcal{B}_3$ not terminating, but $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3)/\mathcal{R}_3 \cup \mathcal{B}_3$ terminating ($\mathcal{DP}(\mathcal{R}_3) = \varnothing$)

Duplication

$\mathcal{B}$ is duplicating $:\Leftrightarrow \exists \ell \to r \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{V}$: x occurs more often in r than in ℓ.

DPs for Relative Termination [Iborra et al. 2016]

If $\mathcal{R}$ dominates $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}$ is non-duplicating, then $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})/\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ is terminating

$\mathcal{R}_{len}$:

$$\mathsf{len}(\mathsf{nil}) \to \mathcal{O}$$
$$\mathsf{len}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to \mathsf{s}(\mathsf{len}(xs))$$

$\mathcal{B}_{com}$:

$$\mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs))$$

$$\mathcal{R}_{len}/\mathcal{B}_{com} \text{ terminates} \Leftrightarrow \mathcal{DP}(\mathcal{R}_{len})/\mathcal{R}_{len} \cup \mathcal{B}_{com} \text{ terminates}$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^{\#} \to \mathsf{b}^{\#} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^{\#} \to \mathsf{a}^{\#} \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\quad \mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad \mathcal{B}_2$: $\quad \mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b}^\# \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^\# \to \mathsf{a}^\# \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$\mathsf{a}^\#$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^{\#} \to \mathsf{b}^{\#} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^{\#} \to \mathsf{a}^{\#} \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$$\mathsf{a}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}^{\#}$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b}^\# \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^\# \to \mathsf{a}^\# \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$$\mathsf{a}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_1)} \mathsf{a}^\#$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^{\#} \to \mathsf{b}^{\#} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^{\#} \to \mathsf{a}^{\#} \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$$\mathsf{a}^{\#} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)}^{(\#)} \mathsf{b}^{\#} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_1)}^{(\#)} \mathsf{a}^{\#} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)}^{(\#)} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b}^\# \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^\# \to \mathsf{a}^\# \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$$\mathsf{a}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_1)} \mathsf{a}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \ldots$$

$$\mathsf{a} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{b} \to \mathsf{a}$

$$\underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \underline{\mathsf{b}} \to_{\mathcal{B}_1} \underline{\mathsf{a}} \to_{\mathcal{R}_1} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b}^\# \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{b}^\# \to \mathsf{a}^\# \\ \mathsf{b} \to \mathsf{a} \end{array} \right\}$

$$\mathsf{a}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_1)} \mathsf{a}^\# \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \ldots$$

$$\mathsf{a} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}$$

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to^{(\#)}_{\mathcal{P}} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to^{(\#)}_{\mathcal{P}} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \ \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \ t_2 \ \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \ \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \; \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \; \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \rightarrow_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\rightarrow_{\mathcal{P}} \cup \rightarrow_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \rightarrow_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\rightarrow_{\mathcal{P}} \cup \rightarrow_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \rightarrow_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \rightarrow_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \rightarrow_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f} \;\;) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$\mathsf{f}^\#$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f} \;\;) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f})$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f})$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a} \;\;, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$\mathsf{f}^\#$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a} \;\; , \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}^\#)$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}\;\;, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f}^\#)$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \;\to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \;\to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^{\#} \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^{\#} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}\;\;, \mathsf{f}^{\#}) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^{\#} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}^{\#}) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f}^{\#}) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \;\to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \;\to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$\mathsf{f}^\#$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#)$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f}^\#)$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#))$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\quad \mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\quad \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}}, \mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b}, \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#)) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

Relative $(\mathcal{P},\mathcal{S})$-Chain

$(\mathcal{P},\mathcal{S})$ is terminating iff there is no infinite evaluation

$$t_1 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; t_2 \to_{\mathcal{P}}^{(\#)} \circ (\to_{\mathcal{P}} \cup \to_{\mathcal{S}})^* \; \ldots$$

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a} \to \mathsf{b}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a},\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}},\mathsf{f}) \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b},\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{d}(\mathsf{b},\mathsf{d}(\underline{\mathsf{a}},\mathsf{f})) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#,\mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a},\mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$\mathsf{f}^\# \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#,\mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b},\mathsf{f}^\#) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{d}(\mathsf{b},\mathsf{d}(\mathsf{a}^\#,\mathsf{f}^\#)) \to_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)}^{(\#)} \ldots$$

Chain Criterion

For $\mathcal{B}$ non-duplicating: $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff $(\mathcal{A}(\mathcal{R}),\mathcal{A}(\mathcal{B}))$ is terminating

Example: Division

$24/[4,3]$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2$$

$\mathcal{R}_{\text{divL}}$:

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \text{minus}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) &\quad \text{minus}(\text{s}(x), \text{s}(y)) \to \text{minus}(x, y) \\
(c) &\quad \text{div}(\mathcal{O}, \text{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) &\quad \text{div}(\text{s}(x), \text{s}(y)) \to \text{s}(\text{div}(\text{minus}(x, y), \text{s}(y))) \\
\\
(e) &\quad \text{divL}(x, \text{nil}) \to x \\
(f) &\quad \text{divL}(x, \text{cons}(y, xs)) \to \text{divL}(\text{div}(x, y), xs)
\end{aligned}$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
\\
(e) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \mathsf{minus}\ (x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) &\quad \mathsf{minus}\ (\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}\ (x, y) \\
(c) &\quad \mathsf{div}\ (\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) &\quad \mathsf{div}\ (\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}\ (x, y), \mathsf{s}(y)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e) &\quad \mathsf{divL}\ (x, \mathsf{nil}) \to x \\
(f) &\quad \mathsf{divL}\ (x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}\ (x, y), xs)
\end{aligned}$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathrm{divL}}$:

$$
\begin{aligned}
(a)&\quad \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) \to x\\
(b)&\quad \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}(x, y)\\
(c)&\quad \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}\\
(d)&\quad \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))\\
\\
(e)&\quad \mathsf{divL}(x, \mathsf{nil}) \to x\\
(f)&\quad \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}_{\mathrm{com}}$:

$$
\begin{aligned}
(g)&\quad \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(x, \mathsf{switch}(y, xs))\\
(h)&\quad \mathsf{switch}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}(x, xs))\\
(i)&\quad \mathsf{switch}(x, xs) \to \mathsf{cons}(x, xs)
\end{aligned}
$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
\\
(e) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}$$

$\mathcal{B}_{\mathsf{com}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(x, \mathsf{switch}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}$$

$24/[4,3]$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{minus}(x,\mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}(x,y) \\
(c) & \mathsf{div}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y))) \\
\\
(e) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{nil}) \to x \\
(f) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x,y),xs)
\end{array}$$

$\mathcal{B}_{\mathsf{com}}$:

$$\begin{array}{ll}
(g) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) \to \mathsf{divL}(x,\mathsf{switch}(y,xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) \to \mathsf{cons}(y,\mathsf{switch}(x,xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}(x,xs) \to \mathsf{cons}(x,xs)
\end{array}$$

$$24/[4,3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[\hat{4},3]$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}(x,\mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x,y) \\
(c) & \mathsf{div}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y))) \\
 & & & \\
(e) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{nil}) & \to & x \\
(f) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x,y),xs)
\end{array}$$

$\mathcal{B}_{\mathsf{com}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{divL}(x,\mathsf{switch}(y,xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{cons}(y,\mathsf{switch}(x,xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}(x,xs) & \to & \mathsf{cons}(x,xs)
\end{array}$$

$$24/[4,3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[\hat{4},3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[3,\hat{4}]$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d) & \mathsf{div}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
 & & & \\
(e) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}$$

$\mathcal{B}_{\mathsf{com}}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(x, \mathsf{switch}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}$$

$$24/[4,3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[\hat{4},3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[3,\hat{4}] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[3,4]$$

Example: Division

$$24/[4,3] = (24/4)/3 = 2 = (24/3)/4 = 24/[3,4]$$

$\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}})$:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \mathsf{minus}^{\#}(x, \mathcal{O}) \to x \\
(b) & \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^{\#}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O} \\
(d1) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^{\#}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(d2) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}^{\#}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(e) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{nil}) \to x \\
(f1) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\
(f2) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}
$$

$\mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}})$:

$$
\begin{array}{ll}
(g) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^{\#}(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}^{\#}(x, xs) \to \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}
$$

$$24/[4,3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[\hat{4},3] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[3,\hat{4}] \to_{\mathcal{B}_{\mathsf{com}}} 24/[3,4]$$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$

$\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{l} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^\# \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{c} f^\# \to d(a^\#, f^\#) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad \mid \quad \}$

(sound & complete)

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \qquad \mid \qquad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^\# \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} f^\# \to d(a^\#, f^\#) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \qquad | \qquad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \qquad \mid \qquad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^\# \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{c} f^\# \to d(a^\#, f^\#) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad \mid \quad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:

$a^\# \to b$ $f^\# \to d(a^\#, f^\#)$

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$

$\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \qquad | \qquad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:

$a^{\#} \to b$ $\qquad$ $f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#})$

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^\# \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} f^\# \to d(a^\#, f^\#) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad | \quad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:

$a^\# \to b$ $f^\# \to d(a^\#, f^\#)$

$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^\# \sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^\# \sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

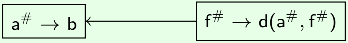
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad | \quad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

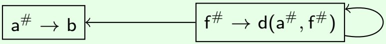
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{l} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad | \quad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

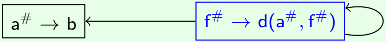
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ \quad \mid \mathcal{Q} \in \mathrm{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \quad \}$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^\# \sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^\# \sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

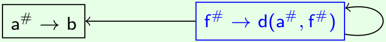
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}, \ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat((\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q})) \mid \mathcal{Q} \in \mathrm{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P}, \mathcal{S})} \}$$

(sound & complete)

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}_2, \varnothing) = \{ (\mathcal{S}_2, \mathcal{P}_2) \}$$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^\# \sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^\# \sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

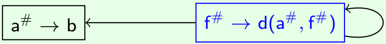
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{l} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}, \ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat((\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q})) \mid \mathcal{Q} \in \mathrm{scc}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \}$$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) \cup \mathcal{S}_2, \varnothing)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})}^{*} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

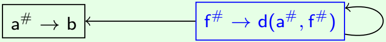
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{a}^\# \to \mathsf{b} \\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} \mathsf{f}^\# \to \mathsf{d}(\mathsf{a}^\#, \mathsf{f}^\#) \\ \mathsf{f} \to \mathsf{d}(\mathsf{a}, \mathsf{f}) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q},\ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat((\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q})) \mid \mathcal{Q} \in \mathrm{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \}$$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2), \mathcal{S}_2)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^\# \sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^\# \sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

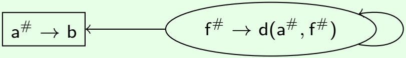
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^\# \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} f^\# \to d(a^\#, f^\#) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{ (\, \mathcal{P} \cap \mathcal{Q},\ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat(\, (\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q}\,)\,) \mid \mathcal{Q} \in \mathrm{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \}$$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2), \mathcal{S}_2)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^\# \sigma_1 \to^*_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})} v^\# \sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

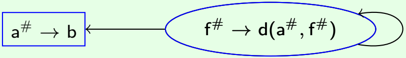
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{l} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q},\ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat((\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q})) \mid \mathcal{Q} \in \mathtt{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \cup \mathtt{Lasso}\}$$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2), \mathcal{S}_2)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})}^{*} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

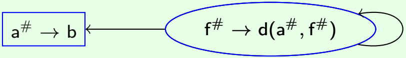
$\mathcal{P}_2$: $\left\{ \begin{array}{r} a^{\#} \to b \\ a \to b \end{array} \right\}$ $\mathcal{S}_2$: $\left\{ \begin{array}{c} f^{\#} \to d(a^{\#}, f^{\#}) \\ f \to d(a, f) \end{array} \right\}$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\,\mathcal{P} \cap \mathcal{Q},\ (\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}) \cup \flat(\,(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \setminus \mathcal{Q}\,)\,) \mid \mathcal{Q} \in \mathtt{SCC}_{\mathcal{P}}^{(\mathcal{P},\mathcal{S})} \cup \mathtt{Lasso}\}$$

(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2) = \{(\mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)\}$

$(\mathcal{A}(\mathcal{P}_2), \mathcal{S}_2)$-Dependency Graph:



$(\mathcal{P}, \mathcal{S})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the ADPs from $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t^{\#}\sigma_1 \to_{\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S})}^{*} v^{\#}\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}^{\#}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}^{\#}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d1) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^{\#}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(d2) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}^{\#}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(e) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f1) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\
(f2) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^{\#}(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}^{\#}(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}
$$

Dependency Graph Processor

$(a)\quad \mathsf{minus}^{\#}(x, \mathcal{O}) \to x$

$(b)\quad \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^{\#}(x, y)$

$(c)\quad \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$

$(d1)\quad \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^{\#}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

$(d2)\quad \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}^{\#}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))$

$(e)\quad \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{nil}) \to x$

$(f1)\quad \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs)$

$(f2)\quad \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$

$(g)\quad \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

$(h)\quad \mathsf{switch}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^{\#}(x, xs))$

$(i)\quad \mathsf{switch}^{\#}(x, xs) \to \mathsf{cons}(x, xs)$

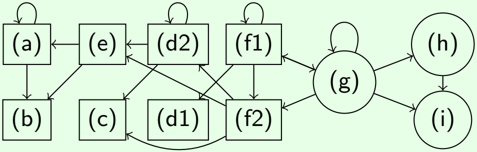
$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}), \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:

Dependency Graph Processor

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}^\#(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}^\#(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}^\#(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d1) & \mathsf{div}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^\#(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(d2) & \mathsf{div}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}^\#(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(e) & \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f1) & \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}^\#(x, y), xs) \\
(f2) & \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}^\#(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^\#(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}^\#(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}
$$

$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}), \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:

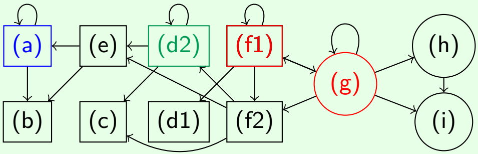


Dependency Graph Processor

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}^{\#}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}^{\#}(x, y) \\
(c) & \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d1) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^{\#}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(d2) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}^{\#}(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(e) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f1) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\
(f2) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^{\#}(x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}^{\#}(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}
$$

$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}), \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:



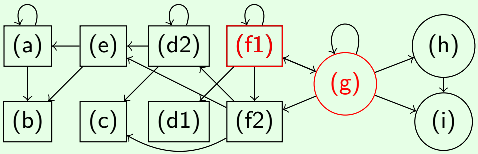
SCC: $\{(a)\}$, $\{(d2)\}$, and $\{(g), (f2)\}$

Dependency Graph Processor

(a) $\mathsf{minus}^\#(x, \mathcal{O}) \to x$
(b) $\mathsf{minus}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{minus}^\#(x, y)$
(c) $\mathsf{div}^\#(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) \to \mathcal{O}$
$(d1)$ $\mathsf{div}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^\#(x, y), \mathsf{s}(y)))$
$(d2)$ $\mathsf{div}^\#(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) \to \mathsf{s}(\mathsf{div}^\#(\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y)))$
(e) $\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{nil}) \to x$
$(f1)$ $\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^\#(x, y), xs)$
$(f2)$ $\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)$

(g) $\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}^\#(y, xs))$
(h) $\mathsf{switch}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}^\#(x, xs))$
(i) $\mathsf{switch}^\#(x, xs) \to \mathsf{cons}(x, xs)$

$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}), \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:



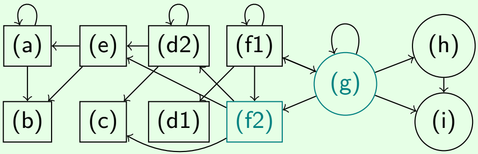
SCC: $\{(a)\}$, $\{(d2)\}$, and $\{(g), (f2)\}$
Lasso: $\{(g), (f1)\}$ and $\{(g), (f2)\}$

Dependency Graph Processor

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}^{\#}(x,\mathcal{O}) & \to & x\\
(b) & \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}^{\#}(x,y)\\
(c) & \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O},\mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O}\\
(d1) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}^{\#}(x,y),\mathsf{s}(y)))\\
(d2) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x),\mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}^{\#}(\mathsf{minus}(x,y),\mathsf{s}(y)))\\
(e) & \mathsf{divL}^{\#}(x,\mathsf{nil}) & \to & x\\
(f1) & \mathsf{divL}^{\#}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x,y),xs)\\
(f2) & \mathsf{divL}^{\#}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x,y),xs)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}^{\#}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(x,\mathsf{switch}^{\#}(y,xs))\\
(h) & \mathsf{switch}^{\#}(x,\mathsf{cons}(y,xs)) & \to & \mathsf{cons}(y,\mathsf{switch}^{\#}(x,xs))\\
(i) & \mathsf{switch}^{\#}(x,xs) & \to & \mathsf{cons}(x,xs)
\end{array}$$

$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}),\mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:



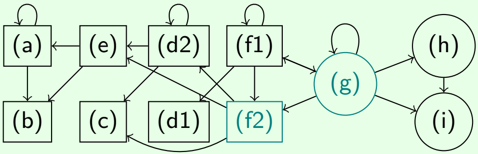
SCC: $\{(a)\}$, $\{(d2)\}$, and $\{(g),(f2)\}$
Lasso: $\{(g),(f1)\}$ and $\{(g),(f2)\}$

Dependency Graph Processor

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{minus}^{\#}(x, \mathcal{O}) & \to & x \\
(b) & \mathsf{minus}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{minus}\ \ (x, y) \\
(c) & \mathsf{div}^{\#}(\mathcal{O}, \mathsf{s}(y)) & \to & \mathcal{O} \\
(d1) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}(\mathsf{minus}\ \ (x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(d2) & \mathsf{div}^{\#}(\mathsf{s}(x), \mathsf{s}(y)) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{div}\ \ (\mathsf{minus}(x, y), \mathsf{s}(y))) \\
(e) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{nil}) & \to & x \\
(f1) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}(\mathsf{div}\ \ (x, y), xs) \\
(f2) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(g) & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\
(h) & \mathsf{switch}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to & \mathsf{cons}(y, \mathsf{switch}\ \ (x, xs)) \\
(i) & \mathsf{switch}^{\#}(x, xs) & \to & \mathsf{cons}(x, xs)
\end{array}
$$

$(\mathcal{A}_1(\mathcal{R}_{\mathsf{divL}}), \mathcal{A}_2(\mathcal{B}_{\mathsf{com}}))$-Dependency Graph:



SCC: $\{(a)\}$, $\{(d2)\}$, and $\{(g), (f2)\}$

Lasso: $\{(g), (f1)\}$ and $\{(g), (f2)\}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol*

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad \geq \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$$

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad > \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs))$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad \geq \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$$

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad > \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{>}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{>}) \cup \flat(\mathcal{P}_{>}))\}$$

(sound & complete)

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \geq Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$$

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) > Pol(\mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_>, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_>) \cup \flat(\mathcal{P}_>))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\qquad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad \geq \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$$

$$Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) \quad > \quad Pol(\mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{>}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{>}) \cup \flat(\mathcal{P}_{>}))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

$$\begin{array}{rclrcl} \mathsf{divL}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & xs & \mathsf{switch}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ & \ldots & & & & \end{array}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}^\#(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$\begin{array}{ccc} Pol(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & \geq & Pol(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^\#(y, xs)) \\ xs + 1 & \geq & xs + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Pol(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & > & Pol(\mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)) \\ xs + 1 & \geq & xs \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_>, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_>) \cup \flat(\mathcal{P}_>))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

$$\begin{array}{cclccl} \mathsf{divL}^\#_{Pol}(x, xs) & = & xs & \mathsf{switch}^\#_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ & \ldots & & & & \end{array}$$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(f2)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \geq_{Pol}$ and

$$\begin{array}{ccc} Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & \geq & Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs))) + Pol(\mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\ xs + 1 & \geq & xs + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & > & Pol(\mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)) \\ xs + 1 & \geq & xs \end{array}$$

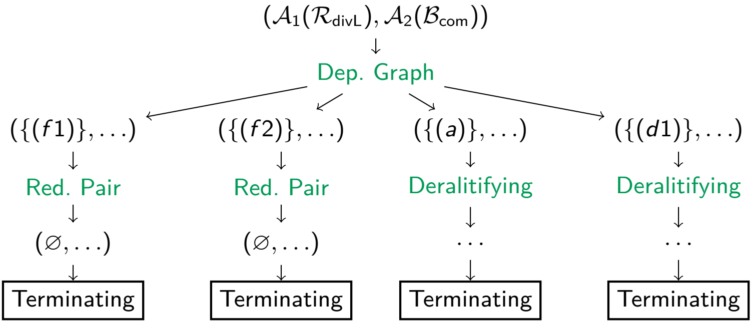
$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{>}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{>}) \cup \flat(\mathcal{P}_{>}))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots) = \{(\varnothing, \ldots)\}$$

$$\begin{array}{lcllcl} \mathsf{divL}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & xs & \mathsf{switch}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ & \ldots & & & & \end{array}$$

Final Relative Termination Proof



$\Rightarrow$ **Relative termination is proved automatically!**

Implementation and Experiments

Fully implemented in AProVE

Implementation and Experiments

Fully implemented in AProVE

Relative rewriting (130 benchmarks):

	new AProVE	NaTT	*old* AProVE	$\mathsf{T_TT_2}$	MultumNonMulta
YES	91 (32)	68 (10)	48 (5)	39 (3)	0 (0)
NO	13 (0)	5 (0)	13 (0)	7 (0)	13 (0)

Implementation and Experiments

Fully implemented in AProVE

Relative rewriting (130 benchmarks):

	new AProVE	NaTT	*old* AProVE	T_TT_2	MultumNonMulta
YES	91 (32)	68 (10)	48 (5)	39 (3)	0 (0)
NO	13 (0)	5 (0)	13 (0)	7 (0)	13 (0)

Relative string rewriting (403 benchmarks):

	MultumNonMulta	Matchbox	AProVE	ADPs
YES	274	274	209	71

Implementation and Experiments

Fully implemented in AProVE

Relative rewriting (130 benchmarks):

	new AProVE	NaTT	*old* AProVE	$\mathsf{T_TT_2}$	MultumNonMulta
YES	91 (32)	68 (10)	48 (5)	39 (3)	0 (0)
NO	13 (0)	5 (0)	13 (0)	7 (0)	13 (0)

Relative string rewriting (403 benchmarks):

	MultumNonMulta	Matchbox	AProVE	ADPs
YES	274	274	209	71

Equational rewriting (76 benchmarks):

	AProVE	MU-TERM	ADPs
YES	66	64	36

Conclusion

- First DP framework specifically for relative termination

Conclusion

- First DP framework specifically for relative termination
- Annotated Dependency Pairs:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs) \end{array} \right\}$$

Conclusion

- First DP framework specifically for relative termination
- Annotated Dependency Pairs:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs) \end{array} \right\}$$

- Adapted the core processors from DP framework:

◦ Dependency Graph Processor
◦ Usable Terms Processor
◦ Reduction Pair Processor
◦ Deralitifying Processor

Conclusion

- First DP framework specifically for relative termination
- Annotated Dependency Pairs:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs) \end{array} \right\}$$

- Adapted the core processors from DP framework:

  - ◦ Dependency Graph Processor
  - ◦ Usable Terms Processor
  - ◦ Reduction Pair Processor
  - ◦ Deralitifying Processor

- Fully implemented in AProVE.

Conclusion

- First DP framework specifically for relative termination
- Annotated Dependency Pairs:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}^{\#}(x, y), xs) \\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \to \mathsf{divL}(\mathsf{div}(x, y), xs) \end{array} \right\}$$

- Adapted the core processors from DP framework:

  ◦ Dependency Graph Processor ◦ Usable Terms Processor
  ◦ Reduction Pair Processor ◦ Deralitifying Processor

- Fully implemented in AProVE.
- Future Work:
  - Further Processors to (dis)-prove relative termination
  - Analyze further possibilities to use ADPs

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$\mathsf{f}^{\#}$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)}^{(\#)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#})$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#})$$

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

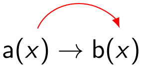
Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{b}(\mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}))$$



Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{b}(\mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \ldots$$

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{b}(\mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \dots$$

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x, x)$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \ldots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{b}(\mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \ldots$$

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x, x) \qquad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x, x)$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_2$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{B}_2$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}(\mathsf{f})$

$$\underline{\mathsf{f}} \to_{\mathcal{B}_2} \underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})} \to_{\mathcal{R}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{f}}) \to_{\mathcal{B}_2} \mathsf{b}(\underline{\mathsf{a}(\mathsf{f})}) \to_{\mathcal{R}_2} \dots$$

$\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$: $\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x)$ $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$: $\mathsf{f} \to \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})$

$$\mathsf{f}^{\#} \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \mathsf{b}(\mathsf{f}^{\#}) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)} \mathsf{b}(\mathsf{a}^{\#}(\mathsf{f}^{\#})) \to^{(\#)}_{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)} \dots$$

$$\mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x) \qquad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x, x) \qquad \mathsf{a}(x) \to \mathsf{b}(x, x)$$

Chain Criterion

For $\mathcal{B}$ non-duplicating: $\mathcal{R}/\mathcal{B}$ is terminating iff $(\mathcal{A}(\mathcal{R}), \mathcal{A}(\mathcal{B}))$ is terminating

General Reduction Pair Processor

$(f2)$ $\mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$

(g) $\mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$

Reduction Pair

- $\succsim$ is reflexive, transitive, and closed under contexts and substitutions,
- $\succ$ is a well-founded order and closed under substitutions
- $\succsim \circ \succ \circ \succsim \ \subseteq\ \succ$.

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $\quad (g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

Reduction Pair

- $\succsim$ is reflexive, transitive, and closed under contexts and substitutions,
- $\succ$ is a well-founded order and closed under substitutions
- $\succsim \circ \succ \circ \succsim\ \subseteq\ \succ$.

Com-monotonic

If $s_1 \succ s_2$, then $\mathtt{Com}_2(s_1, t) \succ \mathtt{Com}_2(s_2, t)$ and $\mathtt{Com}_2(t, s_1) \succ \mathtt{Com}_2(t, s_2)$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

Reduction Pair

- $\succsim$ is reflexive, transitive, and closed under contexts and substitutions,
- $\succ$ is a well-founded order and closed under substitutions
- $\succsim \circ \succ \circ \succsim\ \subseteq\ \succ$.

Com-monotonic

If $s_1 \succ s_2$, then $\mathtt{Com}_2(s_1, t) \succ \mathtt{Com}_2(s_2, t)$ and $\mathtt{Com}_2(t, s_1) \succ \mathtt{Com}_2(t, s_2)$

Com-invariant

Let $\sim\ =\ \succsim \cap \precsim$, then

- $\mathtt{Com}_2(s_1, s_2) \sim \mathtt{Com}_2(s_2, s_1)$
- $\mathtt{Com}_2(s_1, \mathtt{Com}_2(s_2, s_3)) \sim \mathtt{Com}_2(\mathtt{Com}_2(s_1, s_2), s_3)$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$

$(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

$$\begin{array}{ccc} \ell^{\#} & \succeq & \mathrm{ann}(r) \\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succeq & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \end{array}$$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

$$\ell^{\#} \succeq \mathrm{ann}(r)$$

$$\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \succeq \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{\succ}) \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ}))\}$$

(sound & complete)

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$

$(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

$$\begin{array}{ccc} \ell^{\#} & \succeq & \mathrm{ann}(r) \\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succeq & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{\succ}) \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ}))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

$$\begin{array}{ccc} \ell^{\#} & \succeq & \mathrm{ann}(r) \\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succeq & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{\succ}) \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ}))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

$$\begin{array}{rclrcl} \mathtt{Com}_{2\,Pol}(x, y) & = & x + y & \mathsf{switch}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ \mathsf{divL}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & xs & & \ldots & \end{array}$$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^{\#} \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^{\#} \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_{\succ}$

$$\begin{array}{ccc} \ell^{\#} & \succeq & \mathrm{ann}(r) \\ \mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succeq & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs)) \\ Pol(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & \geq & Pol(\mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^{\#}(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^{\#}(y, xs))) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ}, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{\succ}) \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ}))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

$$\begin{array}{rclrcl} \mathtt{Com}_{2\,Pol}(x, y) & = & x + y & \mathsf{switch}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ \mathsf{divL}^{\#}_{Pol}(x, xs) & = & xs & & \ldots & \end{array}$$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}^\#(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^\# \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^\# \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_\succ$

$$\begin{array}{ccc}
\ell^\# & \succeq & \mathrm{ann}(r) \\
\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succeq & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^\#(y, xs)) \\
Pol(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & \geq & Pol(\mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^\#(y, xs))) \\
xs + 1 & \geq & xs + 1
\end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\succ, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_\succ) \cup \flat(\mathcal{P}_\succ))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots)$$

$$\begin{array}{lcl|lcl}
\mathtt{Com}_{2\,Pol}(x, y) & = & x + y & \mathsf{switch}^\#_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\
\mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\
\mathsf{divL}^\#_{Pol}(x, xs) & = & xs & & \ldots &
\end{array}$$

General Reduction Pair Processor

$(f2)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(\mathsf{div}(x, y), xs)$ $(g)\ \mathsf{divL}(x, \mathsf{cons}(y, xs)) \to \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}^\#(y, xs))$

Find Com-monotonic and Com-invariant reduction pair $(\succsim, \succ)$ such that

- $\flat(\mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \subseteq \succsim$ and $\ell^\# \succsim \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- $\ell^\# \succ \mathrm{ann}(r)$ for all $\ell \to r \in \mathcal{P}_\succ$

$$\begin{array}{ccc} \ell^\# & \succ & \mathrm{ann}(r) \\ \mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs)) & \succ & \mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^\#(y, xs)) \\ Pol(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{cons}(y, xs))) & > & Pol(\mathtt{Com}_2(\mathsf{divL}^\#(x, \mathsf{switch}(y, xs)), \mathsf{switch}^\#(y, xs))) \\ xs + 1 & > & xs + 1 \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\succ, (\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_\succ) \cup \flat(\mathcal{P}_\succ))\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(f2)\}, \ldots) = \{(\varnothing, \ldots)\}$$

$$\begin{array}{rclrcl} \mathtt{Com}_{2\,Pol}(x, y) & = & x + y & \mathsf{switch}^\#_{Pol}(x, xs) & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 & \mathsf{switch}_{Pol}(x, xs) & = & xs + 1 \\ \mathsf{divL}^\#_{Pol}(x, xs) & = & xs & & \ldots & \end{array}$$