A Complete Dependency Pair Framework for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Jan-Christoph Kassing, Stefan Dollase, and Jürgen Giesl
RWTH Aachen

Mai 2024

A Complete Dependency Pair Framework for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0)) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0))) \to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

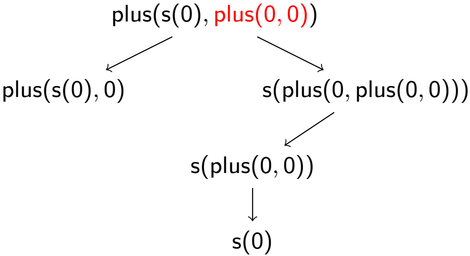
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\mathsf{plus}(\mathsf{s}(0), \mathsf{plus}(0, 0))$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, \mathsf{plus}(0, 0)))$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{plus}(0, 0))$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{s}(0)$$

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

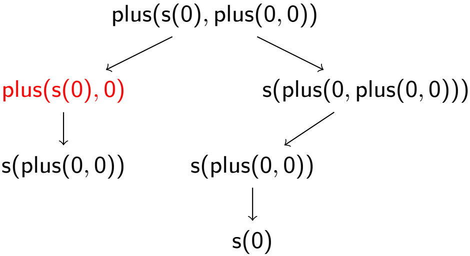
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

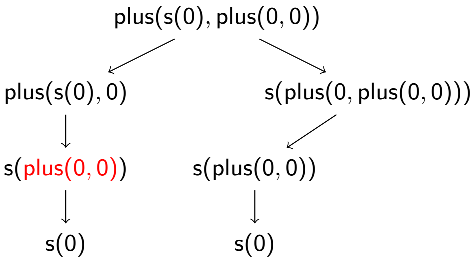
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

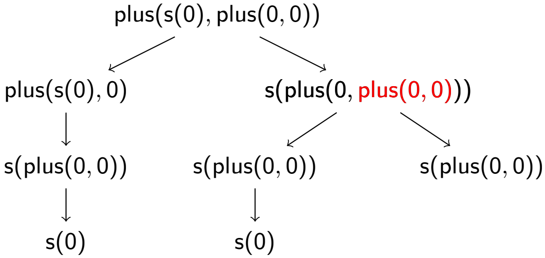
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

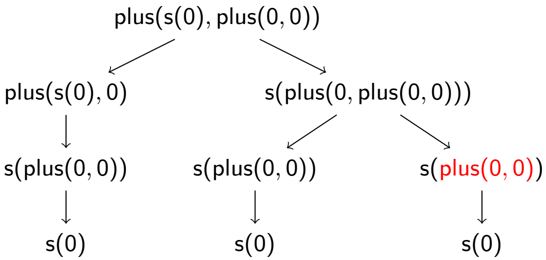
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

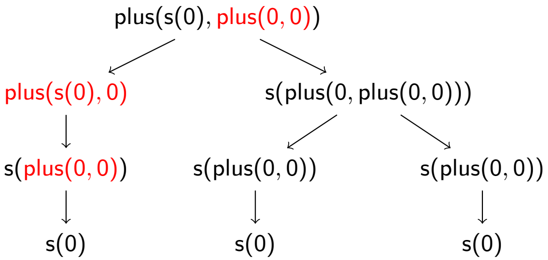
$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{plus}(0, y) & \to & y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) & \to & \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{array}$$

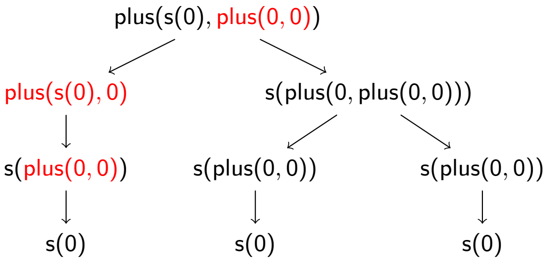


Innermost evaluation: always use an innermost reducible expression

Termination of TRSs

$\mathcal{R}_{plus}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{plus}(0, y) &\to y \\ \mathsf{plus}(\mathsf{s}(x), y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{plus}(x, y)) \end{aligned}$$



Innermost evaluation: always use an innermost reducible expression

Innermost Termination

$\mathcal{R}$ is innermost terminating iff there is no infinite evaluation $t_0 \xrightarrow{i}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{i}_{\mathcal{R}} \dots$

A Complete Dependency Pair Framework for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, . . .]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

fffg

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$\mathsf{fffg} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \mathsf{ffgfgf}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\quad \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$$\mathsf{fffg} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \mathsf{ffgfgf} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \mathsf{fgffgfgf}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$$\mathsf{fffg} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \mathsf{ffgfgf} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \mathsf{fg}\textcolor{red}{\mathsf{ffg}}\mathsf{fgf} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}} \ldots$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs

If $h(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $k(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $h^\#(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to k^\#(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs

If $h(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $k(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $h^\#(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to k^\#(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$:

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\text{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs

If $h(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $k(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $h^\#(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to k^\#(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\text{ffg}})$: $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs

If $h(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to r$ is a rule and $k(r_1, \ldots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $h^\#(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to k^\#(r_1, \ldots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$:

$$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$$
$$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$$

Dependency Pairs [Arts & Giesl 2000, ...]

$\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}$: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

Defined Symbols: f , **Constructor Symbols**: g

$\mathrm{Sub}_D(r)$

$\mathrm{Sub}_D(r) := \{t \mid t$ is a subterm of r with defined root symbol$\}$

$$\mathrm{Sub}_D\big(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))\big) = \big\{\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))), \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))), \mathsf{f}(x)\big\}$$

Dependency Pairs

If $h(\ell_1, \dots, \ell_n) \to r$ is a rule and $k(r_1, \dots, r_m) \in \mathrm{Sub}_D(r)$, then $h^\#(\ell_1, \dots, \ell_n) \to k^\#(r_1, \dots, r_m)$ is a dependency pair

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))) \\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^\#(x) \end{aligned}$$

Dependency Pairs Cont.

$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))))) \\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x))) \\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) &\to \mathsf{f}^{\#}(x) \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}}\ t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

Dependency Pairs Cont.

$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-**Chains**:

Dependency Pairs Cont.

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$$

$$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$$
$$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$$
$$\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \; t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-**Chains**: $\mathsf{f}^{\#}\mathsf{fgfg}$

Dependency Pairs Cont.

$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^*_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-**Chains**: $\mathsf{f}^\#\mathsf{fgfg} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})} \mathsf{f}^\#\mathsf{fg}$

Dependency Pairs Cont.

$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \; t_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-**Chains**: $\mathsf{f}^\#\mathsf{fgfg} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})} \mathsf{f}^\#\mathsf{fg} \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})} \mathsf{f}^\#\mathsf{gf}$

Dependency Pairs Cont.

$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Chain

$\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS.
A sequence of terms $t_0, t_1, \ldots$ is a $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-chain if we have

$$t_0 \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} t_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} \ldots$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-**Chains**: $\mathsf{f}^\#\mathsf{fgfg} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})} \mathsf{f}^\#\mathsf{fg} \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})} \mathsf{f}^\#\mathsf{gf}$

Theorem: Chain Criterion [Arts & Giesl 2000]

$\mathcal{R}$ is innermost terminating iff $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$ is innermost terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems

- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a “big” problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating

Dependency Pair Framework

- Key Idea:
  - Transform a "big" problem into simpler sub-problems
- Our objects we work with:
  - DP problems $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ with $\mathcal{D}$ a set of DPs, $\mathcal{R}$ a TRS
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all rules and dependency pairs: $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}), \mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP processors: $Proc(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}_1), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R}_k)\}$
  - *Proc* is sound: if all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating, then $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating
  - *Proc* is complete: if $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ is innermost terminating, then all $(\mathcal{D}_i, \mathcal{R}_i)$ are innermost terminating

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(*a*) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\dots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$

$\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{i}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

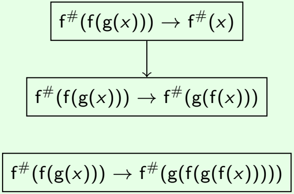
(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \ldots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

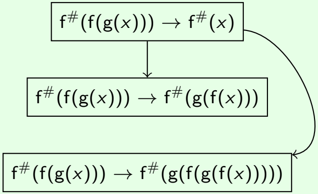
(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\dots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

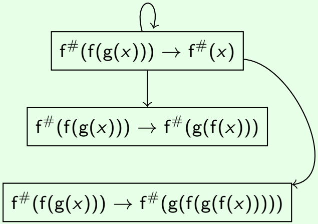
(1) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$Proc_{DG}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1,\mathcal{R}),\ldots,(\mathcal{D}_k,\mathcal{R})\}$
(sound & complete)

$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

where $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}),\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D},\mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^*_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1,σ_2.

Dependency Graph Processor [Arts & Giesl 2000, ...]

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

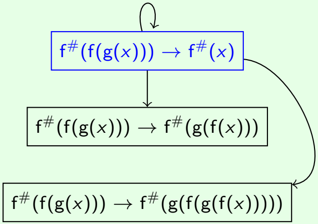
(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{DG}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}_1, \mathcal{R}), \dots, (\mathcal{D}_k, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})\}$$

where $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ are the SCCs of the $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-dependency graph:

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$-Dependency Graph:



$(\mathcal{D}, \mathcal{R})$-Dependency Graph

- directed graph whose nodes are the dependency pairs from $\mathcal{D}$
- there is an arc from $s \to t$ to $v \to w$ iff $t\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}} v\sigma_2$ for substitutions σ_1, σ_2.

Usable Rules Processor (sound)

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

Usable Rules Processor (sound)

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D},\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R}))\}$$
(sound)

Usable Rules Processor (sound)

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(1) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
(2) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D},\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R}))\}$$
(sound)

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

(a) $f(f(g(x))) \to f(g(f(g(f(x)))))$

(2) $f^{\#}(f(g(x))) \to f^{\#}(g(f(x)))$

$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$
(sound)

Usable Rules:

$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{ffg})$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

(a) $f(f(g(x))) \to f(g(f(g(f(x)))))$

(2) $f^{\#}(f(g(x))) \to f^{\#}(g(f(x)))$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

(sound)

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(2)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D},\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R}))\}$$
(sound)

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\},\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(a)\}$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$

(sound)

$$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(a)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

(a) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D}, \mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R}))\}$$
(sound)

$Proc_{UR}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(a)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \varnothing$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Usable Rules Processor (sound)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(3)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{UR}(\mathcal{D},\mathcal{R}) = \{(\mathcal{D},\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R}))\}$$
(sound)

$$Proc_{UR}(\{(3)\},\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(\{(3)\},\varnothing)\}$$

Usable Rules:

$$\mathcal{U}(\{(2)\},\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \{(a)\}$$

$$\mathcal{U}(\{(3)\},\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}) = \varnothing$$

Usable Rules $\mathcal{U}(\mathcal{D},\mathcal{R})$

- All rules of $\mathcal{R}$ that can be used to evaluate a right-hand side of $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(1)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$(2)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$(3)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(1)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$(2)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$(3)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

Find natural polynomial interpretation *Pol*

natural

- natural: $Pol(f) = f_{Pol}$ a polynomial with coefficients $\in \mathbb{N}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(1)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$(2)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$(3)\ \mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(1)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$(2)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$(3)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\succ, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_\succ$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$(a)\ \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$

$(1)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))))$
$(2)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x)))$
$(3)\ \mathsf{f}^\#(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^\#(x)$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\succ, \mathcal{R})\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing)$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_\succ$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(3) $f^{\#}(f(g(x))) \to f^{\#}(x)$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing)$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(3) $\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x))) \to \mathsf{f}^{\#}(x)$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^{\#}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{f}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{g}_{Pol}(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(3) $Pol(\mathsf{f}^{\#}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)))) > Pol(\mathsf{f}^{\#}(x))$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$

(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^{\#}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{f}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{g}_{Pol}(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

(3) $x + 1 > x$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing)$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^{\#}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{f}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{g}_{Pol}(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Reduction Pair Processor (sound & complete)

$$(3) \qquad x + 1 > x$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{D}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{\succ}, \mathcal{R})\}$$
(sound & complete)

$$Proc_{RP}(\{(3)\}, \varnothing) = \{(\varnothing, \varnothing)\}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}^{\#}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{f}_{Pol}(x) &= x \\ \mathsf{g}_{Pol}(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Find natural polynomial interpretation *Pol* such that

- $Pol(\ell) \geq Pol(r)$ for all rules $\ell \to r$ in $\mathcal{R}$
- $Pol(s) > Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}_{\succ}$
- $Pol(s) \geq Pol(t)$ for all rules $s \to t$ in $\mathcal{D}$

Final Innermost Termination Proof

$$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{ffg}}), \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$$

$\downarrow$

Dep. Graph

$\downarrow$

$$(\{(3)\}, \mathcal{R}_{\mathsf{ffg}})$$

$\downarrow$

Usable Rules

$\downarrow$

$$(\{(3)\}, \varnothing)$$

$\downarrow$

Red. Pair

$\downarrow$

$$(\varnothing, \varnothing)$$

$\downarrow$

Inner. Terminating

$\Rightarrow$ **Innermost termination is proved automatically!**

A Complete Dependency Pair Framework for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $$\mathrm{g}(\mathcal{O}) \quad \to \quad \{\, {}^{1}\!/_{2} : \mathcal{O},\ {}^{1}\!/_{2} : \mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathcal{O}))\,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, {}^{1}/_{2} : \mathcal{O},\ {}^{1}/_{2} : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^{1}/_{2} : \mathcal{O},\ {}^{1}/_{2} : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, {}^{1}/_{2} : \mathcal{O},\ {}^{1}/_{4} : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ {}^{1}/_{4} : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \{ {}^1/_2 : \mathcal{O},\ {}^1/_2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ {}^1/_2 : \mathcal{O},\ {}^1/_2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ {}^1/_2 : \mathcal{O},\ {}^1/_4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ {}^1/_4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ {}^1/_2 : \mathcal{O},\ {}^1/_8 : \mathcal{O},\ {}^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ {}^1/_8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ {}^1/_8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination for PTRSs [Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$\begin{aligned}
& \{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \ & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}
\end{aligned}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$

$$
\begin{aligned}
& \{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \\
\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \; & \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}
\end{aligned}
$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $|\mu|$

$$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$ $\quad 0$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad g(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : g(g(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$\{\, 1 : g(\mathcal{O})\,\}$ $\quad 0$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : g^2(\mathcal{O})\,\}$ $\quad 1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : g(\mathcal{O}),\ 1/4 : g^3(\mathcal{O})\,\}$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : g^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : g^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : g^4(\mathcal{O})\,\}$

Termination for PTRSs [Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\} \qquad 0$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\} \qquad 1/2$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\} \qquad 1/2$$

$$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O})) \}$

Distribution: $\{ p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ — $|\mu|$

	$\{ 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \}$	0
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \}$	$1/2$
$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}}$	$\{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \}$	$5/8$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ — No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$

Termination of Probabilistic TRSs

$\mathcal{R}_{rw}$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))\,\}$

Distribution: $\{\, p_1 : t_1, \ldots, p_k : t_k \,\}$ with $p_1 + \ldots + p_k = 1$ $\quad |\mu|$

$\{\, 1 : \mathsf{g}(\mathcal{O}) \,\}$ $\quad 0$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}) \,\}$ $\quad 1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/4 : \mathsf{g}(\mathcal{O}),\ 1/4 : \mathsf{g}^3(\mathcal{O}) \,\}$ $\quad 1/2$

$\rightrightarrows_{\mathcal{R}_{rw}} \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathcal{O},\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^2(\mathcal{O}),\ 1/8 : \mathsf{g}^4(\mathcal{O}) \,\}$ $\quad 5/8$

Termination for PTRSs
[Bournez & Garnier 05, Avanzini & Dal Lago & Yamada 19, ...]

- $\mathcal{R}$ is *terminating* iff there is no infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ No
- $\mathcal{R}$ is *almost-surely terminating (AST)* iff $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$ for every infinite evaluation $\mu_0 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \mu_1 \rightrightarrows_{\mathcal{R}} \ldots$ Yes

A Complete Dependency Pair Framework for Almost-Sure Innermost Termination of Probabilistic Term Rewriting

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \,\}$ not AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \}$ AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \,\}$ AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\; 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\; 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \,\}$ AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \}$ AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \quad \to \quad \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \quad \to \quad \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \,\}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g} \rangle \to \{ 1/2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ 1/2 : \langle \{\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}\}, \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \rangle \}$ not AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^\# \to \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}^\# \,\}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^\#, \mathsf{g} \rangle \to \{\, {}^1\!/\!_2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ {}^1\!/\!_2 : \langle \{\mathsf{g}^\#, \mathsf{g}^\#, \mathsf{g}^\#\}, \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \rangle \,\}$ not AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \}$ AST

$\rightarrow$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g} \rangle \to \{ 1/2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ 1/2 : \langle \{\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}\}, \mathsf{c}(\mathsf{g}, \mathsf{g}, \mathsf{g}) \rangle \}$ not AST

$\rightarrow$ Using DP problems $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is very complicated and incomplete

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \,\}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g} \rangle \to \{\, 1/2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ 1/2 : \langle \{\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}\}, \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \rangle \,\}$ not AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is very complicated and incomplete

Annotated Dependency Pairs (new)

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}^{\#},\mathsf{g}^{\#},\mathsf{g}^{\#}) \,\}^{\mathsf{true}}$ not AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \,\}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \,\}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g} \rangle \to \{\, 1/2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ 1/2 : \langle \{\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}\}, \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \rangle \,\}$ not AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is very complicated and incomplete

Annotated Dependency Pairs (new)

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g} \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}^{\#},\mathsf{g}^{\#},\mathsf{g}^{\#}) \,\}^{\mathsf{true}}$ not AST

$\to$ Using ADP problems $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$ is sound and complete

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{R}_{rw2}$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \}$ not AST

Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g}^{\#} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#} \}$ AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is unsound in the probabilistic setting

Dependency Tuples [Kassing & Giesl 23]

$\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\langle \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g} \rangle \to \{ 1/2 : \langle \varnothing, \mathcal{O} \rangle,\ 1/2 : \langle \{\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}\}, \mathsf{c}(\mathsf{g},\mathsf{g},\mathsf{g}) \rangle \}$ not AST

$\to$ Using DP problems $(\mathcal{DT}(\mathcal{R}_{rw2}), \mathcal{R}_{rw2})$ is very complicated and incomplete

Annotated Dependency Pairs (new)

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$: $\mathsf{g} \to \{ 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{c}(\mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}, \mathsf{g}^{\#}) \}^{\mathsf{true}}$ not AST

$\to$ Using ADP problems $\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw2})$ is sound and complete

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, ^1/_2 : \mathcal{O},\ ^1/_2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$

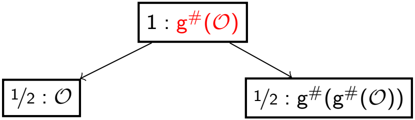
Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \;\to\; \{\, 1/2 : \mathcal{O},\; 1/2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$

$$\boxed{1 : \mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O})}$$

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \;\to\; \{\, {}^{1}\!/_{2} : \mathcal{O},\; {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$



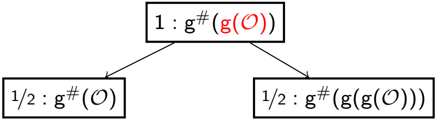
Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$

$$\boxed{1 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}(\mathcal{O}))}$$

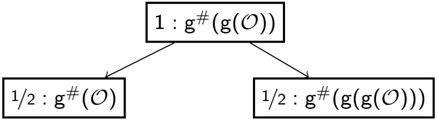
Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, {}^1\!/\!_2 : \mathcal{O},\ {}^1\!/\!_2 : \mathsf{g}^\#(\mathsf{g}^\#(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$



Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \to \{\, 1/2 : \mathcal{O},\ 1/2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$

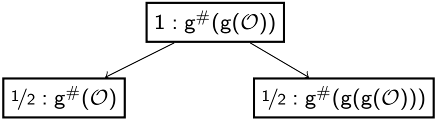


Chain:
We rewrite an annotated redex after a finite number of steps on every path

(Previously: $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}}$)

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \;\to\; \{\, 1/2 : \mathcal{O},\; 1/2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$



Chain:
We rewrite an annotated redex after a finite number of steps on every path

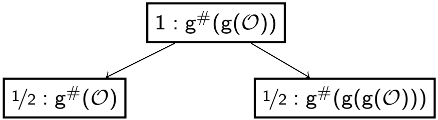
(Previously: $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}}$)

Theorem: Chain Criterion

$\mathcal{R}$ is innermost AST iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$ is innermost AST

Annotated Dependency Pairs

$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{rw})$: $\quad \mathsf{g}(\mathcal{O}) \;\to\; \{\, 1/2 : \mathcal{O},\; 1/2 : \mathsf{g}^{\#}(\mathsf{g}^{\#}(\mathcal{O}))\,\}^{\mathsf{true}}$



Chain:
We rewrite an annotated redex after a finite number of steps on every path

(Previously: $\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{D}} \circ \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathcal{R}}$)

Theorem: Chain Criterion

$\mathcal{R}$ is innermost AST iff $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$ is innermost AST

[KG23] has only “if”

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - ADP Problems $\mathcal{P}$ with $\mathcal{P}$ a set of ADPs

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - ADP Problems $\mathcal{P}$ with $\mathcal{P}$ a set of ADPs
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all annotated dependency pairs: $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

- Our objects we work with:
  - ADP Problems $\mathcal{P}$ with $\mathcal{P}$ a set of ADPs
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all annotated dependency pairs: $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $\mathit{Proc}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

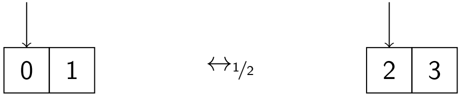
- Our objects we work with:
  - ADP Problems $\mathcal{P}$ with $\mathcal{P}$ a set of ADPs
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all annotated dependency pairs: $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $Proc(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$
  - *Proc* is sound: if all $\mathcal{P}_i$ are innermost AST, then $\mathcal{P}$ is innermost AST

Dependency Pair Framework for Proving iAST of PTRS

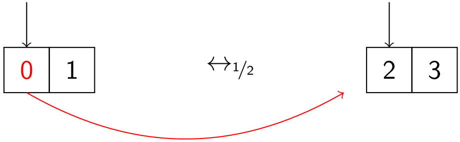
- Our objects we work with:
  - ADP Problems $\mathcal{P}$ with $\mathcal{P}$ a set of ADPs
- How do we start?:
  - (Chain Criterion) Use all annotated dependency pairs: $\mathcal{DP}(\mathcal{R})$
- How do we create smaller problems?:
  - DP Processors: $Proc(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$
  - *Proc* is sound: if all $\mathcal{P}_i$ are innermost AST, then $\mathcal{P}$ is innermost AST
  - *Proc* is complete: if $\mathcal{P}$ is innermost AST, then all $\mathcal{P}_i$ are innermost AST

Move-Algorithm

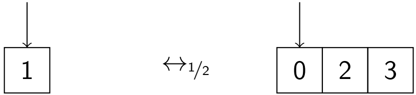
Move-Algorithm



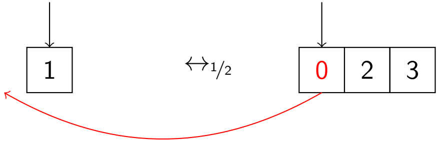
Move-Algorithm



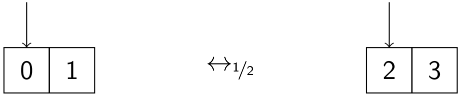
Move-Algorithm



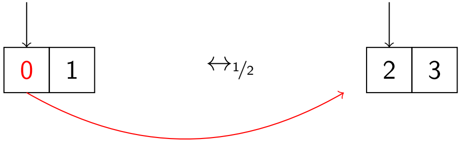
Move-Algorithm



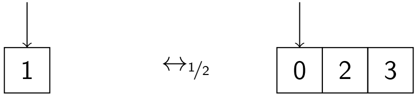
Move-Algorithm



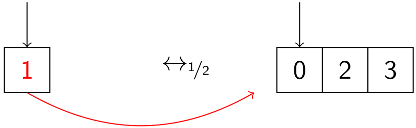
Move-Algorithm



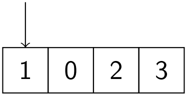
Move-Algorithm



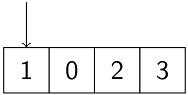
Move-Algorithm



Move-Algorithm



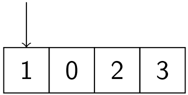
Move-Algorithm



$\mathcal{R}_{\mathsf{move}}$:

$$
\begin{array}{lrl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to 1 : xs \\
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to 1 : \mathsf{false} \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to 1 : \mathsf{true} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to 1 : \mathsf{if}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to 1/2 : \mathsf{move}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & 1/2 : \mathsf{move}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

Move-Algorithm



$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}})$:

$$
\begin{aligned}
&(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x\\
&(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs\\
&(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true}\\
&(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false}\\
&(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false}\\
&(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true}\\
&(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}\\
&(h) & \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)\\
&(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs\\
&(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)),\\
& & & \quad\; {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{aligned}
$$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
& & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$\mathcal{P}$-Dependency Graph

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

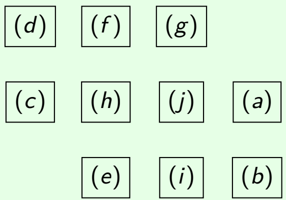
$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

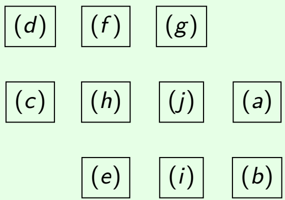
$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x\\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs\\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false}\\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true}\\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true}\\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false}\\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)\\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs\\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)),\\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P})\\
&= \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \dots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
\end{aligned}
$$

where $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

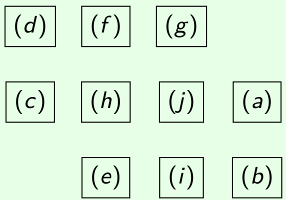
$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

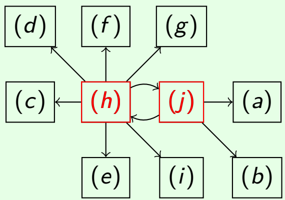
$$
\begin{aligned}
(a)&\quad \mathrm{head}(\mathrm{cons}(x, xs)) \to 1 : x\\
(b)&\quad \mathrm{tail}(\mathrm{cons}(x, xs)) \to 1 : xs\\
(e)&\quad \mathrm{or}(\mathrm{false}, \mathrm{false}) \to 1 : \mathrm{false}\\
(f)&\quad \mathrm{or}(\mathrm{true}, x) \to 1 : \mathrm{true}\\
(g)&\quad \mathrm{or}(x, \mathrm{true}) \to 1 : \mathrm{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)&\quad \mathrm{empty}(\mathrm{nil}) \to 1 : \mathrm{true}\\
(d)&\quad \mathrm{empty}(\mathrm{cons}(x, xs)) \to 1 : \mathrm{false}\\
(h)&\quad \mathrm{move}(xs, ys) \to 1 : \mathrm{if}^{\#}(\mathrm{or}^{\#}(\mathrm{empty}^{\#}(xs), \mathrm{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)\\
(i)&\quad \mathrm{if}(\mathrm{true}, xs, ys) \to 1 : xs\\
(j)&\quad \mathrm{if}(\mathrm{false}, xs, ys) \to 1/2 : \mathrm{move}^{\#}(\mathrm{tail}^{\#}(xs), \mathrm{cons}(\mathrm{head}^{\#}(xs), ys)),\\
&\quad\quad 1/2 : \mathrm{move}^{\#}(\mathrm{cons}(\mathrm{head}^{\#}(ys), xs), \mathrm{tail}^{\#}(ys))
\end{aligned}
$$

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

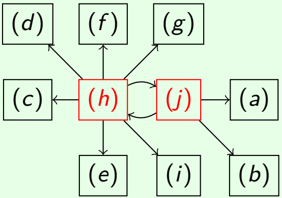
$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}
$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$$
\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}})) = \Big\{\{(\bar{h}), (\bar{j})\} \cup \flat(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}) \setminus \{(h), (j)\})\Big\}
$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathrm{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

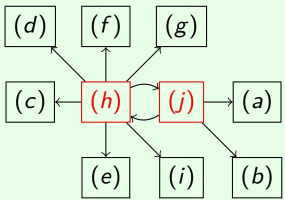
$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(h) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(j) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}^{\#}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}^{\#}(ys), xs), \mathsf{tail}^{\#}(ys))
\end{array}
$$

$$\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$$\mathit{Proc}_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}})) = \big\{\{(\bar{h}), (\bar{j})\} \cup \flat(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}) \setminus \{(h), (j)\})\big\}$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Dependency Graph Processor (based on [KG23])

$$
\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x \\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs \\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}
$$

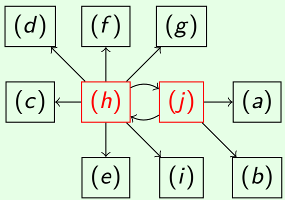
$$
\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs \\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
&\qquad 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

$$Proc_{DG}(\mathcal{P}) = \{\overline{\mathcal{P}_1} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1), \ldots, \overline{\mathcal{P}_k} \cup \flat(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_k)\}$$

where $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ are the SCCs of the $\mathcal{P}$-dependency graph

$$Proc_{DG}(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}})) = \left\{\{(\bar{h}), (\bar{j})\} \cup \flat(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}) \setminus \{(h), (j)\})\right\}$$

$(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}))$-Dependency Graph:



$\mathcal{P}$-Dependency Graph

- there is an arc from $\ldots \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ to $v \to \ldots$ iff there is $t \trianglelefteq_{\#} r_j$ for some j and substitutions σ_1, σ_2 such that $t^{\#}\sigma_1 \xrightarrow{\mathsf{i}}{}^{*}_{\mathsf{np}(\mathcal{P})} v^{\#}\sigma_2$

Transformations (new)

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}$$

Transformations (new)

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

Transformations (new)

$$
\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x\\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs\\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false}\\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true}\\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true}\\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false}\\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)\\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs\\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)),\\
& 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)),\\
& {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

Transformations (new)

$$\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x \\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs \\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs \\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
& 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
& {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}$$

Transformations (new)

$$
\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x \\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs \\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs \\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
&\quad\ \ 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
&\quad\ \ {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

Transformations (new)

$(a)\ \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to 1 : x$
$(b)\ \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to 1 : xs$
$(e)\ \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) \to 1 : \mathsf{false}$
$(f)\ \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) \to 1 : \mathsf{true}$
$(g)\ \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) \to 1 : \mathsf{true}$

$(c)\ \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) \to 1 : \mathsf{true}$
$(d)\ \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) \to 1 : \mathsf{false}$
$(\bar{h})\ \mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)$
$(i)\ \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) \to 1 : xs$
$(\bar{j})\ \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))$

$$(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) \to {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)),\ {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))$$

↓ (Instantiation)

$$(\bar{j}')\ \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(y, ys))),\ {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(y, ys)), \mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(y, ys)))$$

Transformations (new)

$$\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x\\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs\\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false}\\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true}\\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true}\\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false}\\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)\\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs\\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)),\\
& \quad\; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}$$

$$(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) \to {}^1/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)),\ {}^1/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))$$

↓ (Instantiation)

$$\begin{aligned}
(\bar{j}')\ & \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys))\\
& \to {}^1/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(y, ys))),\\
& \quad\; {}^1/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(y, ys)), \mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(y, ys)))
\end{aligned}$$

Transformations (new)

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

$$
(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) \to {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \quad {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
$$

$\downarrow$ (Instantiation)

$$
(\bar{j}') \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(y, ys))), \quad {}^{1}\!/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(y, ys)), \mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(y, ys)))
$$

Transformations (new)

$$\begin{array}{llcl} (a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\ (b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\ (e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\ (f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\ (g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} (c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\ (d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\ (\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\ (i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\ (\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\ & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys)) \end{array}$$

$$(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) \to {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \; {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))$$

↓ (Instantiation)

$$(\bar{j}') \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{cons}(y, ys))), \; {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(\mathsf{cons}(y, ys)), \mathsf{cons}(x, xs)), \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(y, ys)))$$

↓ (rewriting)

$$(\mathcal{T}(\bar{j})) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, ys))), \; {}^1\!/_2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs)), ys)$$

Transformations cont.

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

Transformations cont.

$$
\begin{aligned}
(a)\quad \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : x \\
(b)\quad \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : xs \\
(e)\quad \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(f)\quad \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(g)\quad \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) &\to 1 : \mathsf{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) &\to 1 : \mathsf{true} \\
(d)\quad \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h})\quad \mathsf{move}(xs, ys) &\to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i)\quad \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) &\to 1 : xs \\
(\bar{j})\quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) &\to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
&\quad\; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{aligned}
$$

$$(\bar{h})\qquad \mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)$$

Transformations cont.

$$\begin{array}{rrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
& & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}$$

$(\bar{h})$ $\quad \mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)$

$\downarrow$ (Transformations, ...)

$(\mathcal{T}(\bar{h}))$

$\quad \mathsf{move}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys))$

Transformations cont.

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}
$$

$(\bar{h})$ $\quad \mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)$

$\downarrow$ (Transformations, ...)

$(\mathcal{T}(\bar{h}))$

$\mathsf{move}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys))$

After the usable rules processors:

Transformations cont.

$$\begin{array}{llcl}
(a) & \mathsf{head}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : x \\
(b) & \mathsf{tail}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : xs \\
(e) & \mathsf{or}(\mathsf{false}, \mathsf{false}) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(f) & \mathsf{or}(\mathsf{true}, x) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(g) & \mathsf{or}(x, \mathsf{true}) & \to & 1 : \mathsf{true}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(c) & \mathsf{empty}(\mathsf{nil}) & \to & 1 : \mathsf{true} \\
(d) & \mathsf{empty}(\mathsf{cons}(x, xs)) & \to & 1 : \mathsf{false} \\
(\bar{h}) & \mathsf{move}(xs, ys) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys) \\
(i) & \mathsf{if}(\mathsf{true}, xs, ys) & \to & 1 : xs \\
(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, xs, ys) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{tail}(xs), \mathsf{cons}(\mathsf{head}(xs), ys)), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(\mathsf{head}(ys), xs), \mathsf{tail}(ys))
\end{array}$$

$$(\bar{h}) \qquad \mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}(\mathsf{empty}(xs), \mathsf{empty}(ys)), xs, ys)$$

$\downarrow$ (Transformations, ...)

$$(\mathcal{T}(\bar{h})) \quad \mathsf{move}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys))$$

After the usable rules processors:

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{move}(\mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) \\
\mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathsf{cons}(x, xs), \mathsf{cons}(y, ys)) & \to & {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathsf{cons}(y, ys))), \\
 & & {}^{1}/_{2} : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, \mathsf{cons}(x, xs)), ys)
\end{array}$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\begin{array}{lrcl}
\mathcal{T}(\bar{h}) & \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \\
\mathcal{T}(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \\
 & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)
\end{array}$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\mathcal{T}(\bar{h}) \quad \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))$$
$$\mathcal{T}(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\begin{array}{lll} \mathcal{T}(\bar{h}) & \mathsf{move}(\mathit{cons}(x, xs), \mathit{cons}(y, ys)) \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, \mathit{cons}(x, xs), \mathit{cons}(y, ys)) \\ \mathcal{T}(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, \mathit{cons}(x, xs), \mathit{cons}(y, ys)) \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathit{cons}(y, ys))), \\ & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, \mathit{cons}(x, xs)), ys) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\begin{array}{lrl} \mathcal{T}(\bar{h}) & \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \\ \mathcal{T}(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \\ & & \quad 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\mathcal{T}(\bar{h}) \quad \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))$$
$$\mathcal{T}(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)$$

$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) =$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\mathcal{T}(\bar{h}) \quad \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))$$
$$\mathcal{T}(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)$$

$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) =$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{false}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, y) &= y + 1 \\ \mathsf{move}^{\#}_{Pol}(x, y) &= 2x + y \\ \mathsf{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) &= 2y + z \end{aligned}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$\mathcal{T}(\bar{h})$ move($cons(x, xs)$, $cons(y, ys)$) $\to$ 1 : if$^{\#}$(false, $cons(x, xs)$, $cons(y, ys)$)
$\mathcal{T}(\bar{j})$ if(false, $cons(x, xs)$, $cons(y, ys)$) $\to$ 1/2 : move$^{\#}$(xs, cons(x, $cons(y, ys)$)),
1/2 : move$^{\#}$(cons(y, $cons(x, xs)$), ys)

$$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) =$$

$$\begin{aligned} & Pol(\text{if}^{\#}(\text{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = \; & 2xs + ys + 3 \\ = \; & 1/2 \cdot Pol(\text{move}^{\#}(xs, \text{cons}(x, cons(y, ys)))) \\ & + 1/2 \cdot Pol(\text{move}^{\#}(\text{cons}(y, cons(x, xs)), ys)) \end{aligned}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{aligned} \text{false}_{Pol} &= 0 \\ \text{cons}_{Pol}(x, y) &= y + 1 \\ \text{move}^{\#}_{Pol}(x, y) &= 2x + y \\ \text{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) &= 2y + z \end{aligned}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\mathcal{T}(\bar{h}) \quad \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))$$

$$\mathcal{T}(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \; 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)$$

$$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) =$$

$$\begin{aligned} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = \; & 2xs + ys + 3 \\ = \; & 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \\ & + 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs), ys))) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = \; & 2xs + ys + 3 \\ > \; & 2xs + ys + 2 \\ = \; & Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \end{aligned}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{false}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, y) &= y + 1 \\ \mathsf{move}^{\#}_{Pol}(x, y) &= 2x + y \\ \mathsf{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) &= 2y + z \end{aligned}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\mathcal{T}(\bar{h}) \quad \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))$$
$$\mathcal{T}(\bar{j}) \quad \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \to 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \quad 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys)$$

$$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) = \{\flat(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\})\}$$

$$\begin{aligned} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = \; & 2xs + ys + 3 \\ = \; & 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \\ & + 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs), ys))) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = \; & 2xs + ys + 3 \\ > \; & 2xs + ys + 2 \\ = \; & Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \end{aligned}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{false}_{Pol} &= 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, y) &= y + 1 \\ \mathsf{move}^{\#}_{Pol}(x, y) &= 2x + y \\ \mathsf{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) &= 2y + z \end{aligned}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation Pol such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \dots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{T}(\bar{h}) & \mathsf{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \\ \mathcal{T}(\bar{j}) & \mathsf{if}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys))), \\ & & & 1/2 : \mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs)), ys) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) = \{\flat(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\})\}$$

$$\begin{array}{rl} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = & 2xs + ys + 3 \\ = & 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \\ & + 1/2 \cdot Pol(\mathsf{move}^{\#}(\mathsf{cons}(y, cons(x, xs), ys))) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rl} & Pol(\mathsf{if}^{\#}(\mathsf{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = & 2xs + ys + 3 \\ > & 2xs + ys + 2 \\ = & Pol(\mathsf{move}^{\#}(xs, \mathsf{cons}(x, cons(y, ys)))) \end{array}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{false}_{Pol} & = & 0 \\ \mathsf{cons}_{Pol}(x, y) & = & y + 1 \\ \mathsf{move}^{\#}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y \\ \mathsf{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) & = & 2y + z \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Reduction Pair Processor (based on [KG23])

$$\begin{array}{llll} \mathcal{T}(\bar{h}) & \mathrm{move}(cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1 : \mathrm{if}\ (\mathrm{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) \\ \mathcal{T}(\bar{j}) & \mathrm{if}(\mathrm{false}, cons(x, xs), cons(y, ys)) & \to & 1/2 : \mathrm{move}\ (xs, \mathrm{cons}(x, cons(y, ys))), \\ & & & 1/2 : \mathrm{move}\ (\mathrm{cons}(y, cons(x, xs)), ys) \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}) = \{\flat(\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\})\}$$

$$\begin{array}{ll} & Pol(\mathrm{if}^{\#}(\mathrm{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = & 2xs + ys + 3 \\ = & 1/2 \cdot Pol(\mathrm{move}^{\#}(xs, \mathrm{cons}(x, cons(y, ys)))) \\ & + 1/2 \cdot Pol(\mathrm{move}^{\#}(\mathrm{cons}(y, cons(x, xs), ys))) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ll} & Pol(\mathrm{if}^{\#}(\mathrm{false}, cons(x, xs), cons(y, ys))) \\ = & 2xs + ys + 3 \\ > & 2xs + ys + 2 \\ = & Pol(\mathrm{move}^{\#}(xs, \mathrm{cons}(x, cons(y, ys)))) \end{array}$$

$\{\mathcal{T}(\bar{h}), \mathcal{T}(\bar{j})\}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{false}_{Pol} & = & 0 \\ \mathrm{cons}_{Pol}(x, y) & = & y + 1 \\ \mathrm{move}^{\#}_{Pol}(x, y) & = & 2x + y \\ \mathrm{if}^{\#}_{Pol}(x, y, z) & = & 2y + z \end{array}$$

$$Proc_{RP}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\succ} \cup \flat(\mathcal{P}_{\succ})\}$$

Find multilinear, natural polynomial interpretation *Pol* such that

- For all $\ell \to \mu = \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}$:

$$Pol(\ell^{\#}) \geq \mathbb{E}(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq k} p_j \cdot \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

- For all $\ell \to \{p_1 : r_1, \ldots, p_k : r_k\}$ in $\mathcal{P}_{\succ}$ there is a j with:

$$Pol(\ell^{\#}) > \sum_{t \trianglelefteq_{\#} r_j} Pol(t^{\#})$$

Final Innermost Almost-Sure Termination Proof

$$\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}})$$
$$\downarrow$$
Dep. Graph
$$\downarrow$$
$$\Big\{\{(\bar{h}),(\bar{j})\} \cup \flat(\mathcal{DP}(\mathcal{R}_{\mathsf{move}}) \setminus \{(h),(j)\})\Big\}$$
$$\downarrow$$
Transformations + ...
$$\downarrow$$
$$\{\mathcal{T}(\bar{h}),\mathcal{T}(\bar{j})\}$$
$$\downarrow$$
Red. Pair
$$\downarrow$$
$$\flat(\{\mathcal{T}(\bar{h}),\mathcal{T}(\bar{j})\})$$
$$\downarrow$$
iAST

$\Rightarrow$ **Innermost AST is proved automatically!**

Implementation and Experiments

- Fully implemented in AProVE
- Evaluated on 100 benchmarks (90 iAST)

	ADPs	DTs [KG23]	NaTT2 [ADY19]
iAST	77	54	24

Probabilistic Quicksort:

$$\begin{aligned}
\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1/2 : \mathsf{cons}(x, xs), 1/2 : \mathsf{rotate}(\mathsf{app}(xs, \mathsf{cons}(x, \mathsf{nil})))\} \\
\mathsf{qs}(\mathsf{nil}) &\to \{1 : \mathsf{nil}\} \\
\mathsf{qs}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{qsHelp}(\mathsf{rotate}(\mathsf{cons}(x, xs)))\} \\
\mathsf{qsHelp}(\mathsf{cons}(x, xs)) &\to \{1 : \mathsf{app}(\mathsf{qs}(\mathsf{low}(x, xs)), \mathsf{cons}(x, \mathsf{qs}(\mathsf{high}(x, xs))))\} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Conclusion

- ADP framework for innermost AST of probabilistic TRSs
- New Annotated Dependency Pairs:

$$\mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)$$

Conclusion

- ADP framework for innermost AST of probabilistic TRSs
- New Annotated Dependency Pairs:

$$\mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)$$

- Adapted the processors from [KG23]:

◦ Dependency Graph Processor
◦ Reduction Pair Processor
◦ Probability Removal Processor
◦ Usable Terms Processor
◦ Usable Rules Processor

Conclusion

- ADP framework for innermost AST of probabilistic TRSs
- New Annotated Dependency Pairs:

$$\mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)$$

- Adapted the processors from [KG23]:
  - Dependency Graph Processor
  - Reduction Pair Processor
  - Probability Removal Processor
  - Usable Terms Processor
  - Usable Rules Processor
- Added new *transformational* processors:
  - Instantiation Processor
  - Rewriting Processor
  - Forward Instantiation Processor
  - Rule Overlap Instantiation Processor

Conclusion

- ADP framework for innermost AST of probabilistic TRSs
- New Annotated Dependency Pairs:

$$\mathsf{move}(xs, ys) \to 1 : \mathsf{if}^{\#}(\mathsf{or}^{\#}(\mathsf{empty}^{\#}(xs), \mathsf{empty}^{\#}(ys)), xs, ys)$$

- Adapted the processors from [KG23]:
  - ◦ Dependency Graph Processor
  - ◦ Reduction Pair Processor
  - ◦ Probability Removal Processor
  - ◦ Usable Terms Processor
  - ◦ Usable Rules Processor
- Added new *transformational* processors:
  - ◦ Instantiation Processor
  - ◦ Rewriting Processor
  - ◦ Forward Instantiation Processor
  - ◦ Rule Overlap Instantiation Processor
- Fully implemented in AProVE.